

第1章 基本不等式和证明不等式的基本方法	1
数学实验 <b>→ 点差法</b>	2
1.1 实数可以比较大小	3
习题 1	3
1.2 比较法证明不等式	5
习题 2	6
1.3 基本不等式	8
习题 3	13
1.4 基本不等式在实际应用举例	15
习题 4	16
阅读与思考 <b>基本平均数与几何平均数</b>	16
1.5 分析法和综合法	18
习题 5	19
1.6 反证法和放缩法	22
习题 6	23
第2章 绝对值不等式	25
2.1 含绝对值的不等式	26
习题 7	28
2.2 含绝对值的不等式举例	29
习题 8	30
阅读与思考 <b>距离的性质</b>	31
第3章 数学归纳法与不等式证明	33
3.1 数学归纳法	35
习题 9	36
3.2 数学归纳法证不等式	40
习题 10	42
第4章 平均数不等式	44
4.1 三个正数的平均数不等式	45
习题 11	47
4.2 三个正数的均值不等式在实际应用举例	48
习题 12	49
阅读与思考 <b>→ 个正数的平均数不等式</b>	50
数学实验 <b>→ 求最大值的数学</b>	52
第5章 三个重要不等式	57
5.1 柯西不等式	58
习题 13	60
5.2 排序不等式	61
习题 14	64
5.3 贝努利不等式	67
数学实验 <b>→ 验证贝努利不等式</b>	68
第6章 极值问题与参数法	72
阅读 <b>→ 数学问题中英文对照表</b>	73

精品教学网[www.itvb.net](http://www.itvb.net)

全力打造全国最新最全的免费视频教学网站，现有内容已经覆盖学前，小学，初中高中，大学，职业等各学段欢迎各位爱学人士前来学习交流。

**(若有需要本书配套的特级教师同步辅导视频请联系QQ181335740)**

## 第1章

# 基本不等式和证明不等式的基本方法



比较法、分析法、综合法、反证法、数学归纳法是证明不等式的基本方法。本章将复习不等式的基本性质和基本不等式，通过一些典型例题学习证明不等式的基本方法。



## 数学实验

### $\pi$ 的近似值

我国古代著名数学家祖冲之利用  $\frac{355}{113}$  作为  $\pi$  的近似值，准确度很高。



你能求出  $\pi$  的分数，而且想这个分数尽可能小，怎么求呢？

这个问题用数学语言说，就是：

“找一对正整数  $p, q$ ，使满足

(1)  $\frac{p}{q}$  与  $\frac{355}{113}$  足够近，也就是

$$\left| \pi - \frac{p}{q} \right| < \left| \frac{355}{113} - \pi \right|,$$

(2) 要求  $p$  尽可能小。”

按照惯例，我们把问题记清楚，再用不等式来表述。

可以想见，第一个一个分数来试做，找到一个满足上述条件的就可以了。

当然为  $p$  的正分数很多，没有限制，即  $\frac{p}{q} < 3.14$ ，不用考虑；即  $\frac{p}{q} > 3.14$ ，也不用考虑。用不等式限制分子  $p$  的范围：

$$\text{由 } \frac{p}{q} > 3.1, \text{ 得 } q < 3.1p,$$

$$\text{由 } \frac{p}{q} < 3.2, \text{ 得 } q < 3.2p.$$

这里用到 **不等式 (Inequality)** 的基本性质。

对于  $p$ ，由上面两个由一个点一个点的来试，用计算机搜索，可以找到一个小数，看能否用此表示。

用计算机计算数据太慢了，使用“2+2=4”的规律工作区最为简单。



组合使用一个分母为 10 000 的分数，第一层就加进它项变成  $\frac{1000}{1000}$  更精确一点。

在 10 000—10 000 之间，有使用  $\frac{1000}{1000}$  更精确一点的分量，又要使用这一项值。

$$\text{for } p = 10000; p < 10000; p = p + 1;$$

这样一下就把加了，因此。

使用使用了比  $\frac{1000}{1000}$  更精确一点的分量是  $\frac{1000}{1000}$ 。

实际上，使用使用及平率式知识，工作量可以少得多，能大大减少计算，甚至得到更精确的结果。

## 1.1 实数可以比较大小

我们知道,实数集与数轴上的点集是一一对应的.在数轴上不同两点中,左边的点所表示的实数比右边的点表示的实数小.如图1-1所示.

点A表示实数 $a$ ,点B表示实数 $b$ ,点A在点B的左边,那么 $a < b$ .从图1-1中,我们还可以得到:



图 1-1

如果 $a > b$ ,那么 $a - b$ 是正数;反之, $a - b$ 是正数,则 $a > b$ .

类似地,如果 $a < b$ ,那么 $a - b$ 是负数;如果 $a = b$ ,那么 $a - b = 0$ .它们的逆命题也都是正确的.

这里说明了

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0;$$

$$a = b \Leftrightarrow a - b = 0;$$

$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0.$$

由此可见,实数可以比较大小.要比较两个实数的大小,可通过考察它们的差与0的大小关系来完成.

**例1** 比较 $3a - 11$ 与 $a^2 + 3a$ 的大小.

**解**  $3a - 11$ 与 $a^2 + 3a$

$$= a^2 + 3a - (3a - 11) = a^2 + 11$$

$$= a(a + 11).$$

$\therefore 3a - 11$ 与 $a^2 + 3a$ 的大小

**例2** 比较 $x^2 + 3$ 与 $3x$ 的大小.

**解**  $x^2 + 3$ 与 $3x$

$$= x^2 - 3x + 3$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0,$$

$\therefore x^2 + 3 > 3x$ .

**例 3** 甲、乙两人同时同地出发,沿同一路线走到同一地点.甲有一半时间以速度  $a$  行走,另一半时间以速度  $b$  行走;乙有一半路程以速度  $a$  行走,另一半路程以速度  $b$  行走.如果  $a \neq b$ ,问甲、乙两人谁先到达指定地点.

**解** 设从出发点至指定地点的路程是  $s$ , 甲、乙走完这段路程所用的时间分别为  $t_1, t_2$ . 依题意, 有

$$\frac{t_1}{2}a + \frac{t_1}{2}b = s,$$

$$\frac{s}{2a} + \frac{s}{2b} = t_2.$$

从而  $t_1 = \frac{2s}{a+b}, t_2 = \frac{s(a+b)}{2ab}$ . 于是

$$\begin{aligned} t_1 - t_2 &= \frac{2s}{a+b} - \frac{s(a+b)}{2ab} \\ &= \frac{s(2ab - (a+b)^2)}{2(a+b)ab} \\ &= -\frac{s(a-b)^2}{2ab(a+b)}. \end{aligned}$$

其中  $s, a, b$  都是正数, 且  $a \neq b$ , 于是  $t_1 - t_2 < 0$ , 即

$$t_1 < t_2.$$

从而知甲比乙先到达指定地点.

## 习题 1

1. 证明  $a \neq b$ , 证明  $(a^2 + b^2) / (a + b) > (a^2 + b^2) / (a + b)$ .

2. 设  $a \neq b$ , 证明下列各式的大小:

(1)  $a^2/ba + ba/ba + (a+b)/ab > a^2/ba + ba/ba + ab/a$

(2)  $a^2/ba + ba/ba > a^2/ba + ab/a$ .

3. 设  $a < b < 0$ , 证明  $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} > \frac{a - b}{a + b}$  的大小.

4. 设  $a < b$ , 证明:  $\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} > \frac{a + b}{a + b}$ .

3. 假设购进两个型号的电视机, 一型号电视机买成  $a$  元, 二型号电视机买成  $b$  元( $a < b$ ), 购进一型号  $x$  台, 二型号  $y$  台, 求以两种电视机的平均数购进, 则购进电视机的公平价格是?

### 1.1 比较法证不等式

一个不等式实际上表示的就是不等式两边的式子高低, 从上一节我们知道了实数大小比较可以通过考察两数的是与 0 的大小关系来实现, 因此, 我们常证明一个不等式也可以如同进行实数大小比较一样, 采用差法、商法、比值审势的各式进行. 我们将这种方法简称为**比较法**(comparison method).

以下我们利用比较法证明不等式的基本性质.

**性质 1** 若  $a > 0$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , 则  $a + c > 0 + c$ .

**证明**  $\because a + c - (0 + c) = a - 0 = a$ ,

又由  $a > 0$ , 知  $a - 0 > 0$ ,

$\therefore a + c > 0 + c$ .

**性质 2** 若  $a > 0$ ,  $b > 0$ , 则  $a > 0$ .

**证明**  $\because a > 0$ ,  $b > 0$ ,

$\therefore a - 0 > 0$ ,  $b - 0 > 0$ ,

$\therefore a - a + (a - 0) + (b - 0) > 0 + 0$ ,

$\therefore a > 0$ .

**性质 3** 若  $a > 0$ ,  $c > 0$ , 则  $a + c > 0 + 0$ .

(请同学们同学们自己完成.)

**性质 4** (1) 若  $a > 0$ ,  $c > 0$ , 则  $ac > 0$ ;

(2) 若  $a > 0$ ,  $c < 0$ , 则  $ac < 0$ ;

**证明** (1)  $ac - 0 = (a - 0)(c - 0)$ ,

因  $c > 0$ , 故  $a - 0$  与  $a - 0$  同号,

$\therefore a > 0$ ,  $\therefore a - 0 > 0$ ,

$\therefore ac = (a - 0)(c - 0)$ .

**性质 5** 若  $a > 0$ ,

则  $a > 0$ , 则  $\frac{1}{a} > 0$ .

**证明**

这里我们回顾了以前学过的不等式性质, 这里我们学习一种新的不等式性质, 这里我们学习一种新的不等式性质, 这里我们学习一种新的不等式性质.

点  $a > b$ 。

(2) (证明题请同学们独立完成。)

**性质 3** 若  $a > b > 0$ ,  $c > d > 0$ , 则  $ac > bd$ 。

(证明题请同学们独立完成。)

**性质 4** 若  $a > b > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a > b$ , 则

(1)  $a^n > b^n$ ; (2)  $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ 。

**证明** (1)  $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ 。 (2)

因  $a > b$ ,  $a > 0$ , 上述中圆圈内各项均为正数,  $a^{n-1} - b^{n-1}$  与  $a - b$  同号。

∴  $a^n > b^n$ 。 点  $a = b > 0$ 。

∴  $a^n - b^n > 0$ 。

即  $a^n > b^n$ 。

(2) 因  $a^{\frac{1}{n}}$ ,  $b^{\frac{1}{n}}$  是圆圈中的  $a$ ,  $b$ , 由 (1) 知  $a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}}$  与  $a - b$  同号。

即  $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ 。

比较量是证明不等式最基本的方法, 下面我们利用比较法来证明不等式。

**例 1** 求证:  $x^2 + \frac{1}{2} > 2x$ 。

**证明** ∵  $x^2 + \frac{1}{2} - 2x$

$$= x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{2}$$

$$= (x - 1)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} > 0,$$

∴  $x^2 + \frac{1}{2} > 2x$ 。

**例 2** 已知  $a, b > 0$ , 求证:

$$a^2 + b^2 \geq a^2b + ab^2.$$

**证明**  $(a^2 + b^2) - (a^2b + ab^2)$

$$= a^2 - a^2b + b^2 - ab^2$$

$$= a^2(a - b) - b^2(a - b)$$

$$=4a-4a^2(a^2-a^2)$$

$$=4a-4a^2(a^2+ab+b^2)$$

$$=4a-4a^2\left[\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{1}{4}b^2\right]\geq 0,$$

$$\therefore a^2+b^2\geq 2ab(a+b).$$

### 习題 3

1. 用“ $>$ ”, “ $<$ ”号填空:

(1) 如果  $a < b$ , 那么  $-a$  \_\_\_\_\_  $-b$ .

(2) 如果  $a < b < 0$ , 那么  $\frac{1}{a}$  \_\_\_\_\_  $\frac{1}{b}$ .

(3) 如果  $a < b < 0 < c$ , 那么  $\frac{1}{a}$  \_\_\_\_\_  $\frac{1}{b}$ .

(4) 如果  $0 < a < b < c$ , 则  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ , 那么  $\frac{1}{b} - \frac{1}{c}$  \_\_\_\_\_  $\frac{1}{c}$ .

2. 求证:

(1) 如果  $a < b$ ,  $a < c$ ,  $b < c$ , 那么  $a^2 < ac < bc$ .

(2) 如果  $a < b < 0$ ,  $a < c < 0$ , 那么  $ac < bc$ .

3. 求证:  $a^2 + b^2 \geq 2ab(a + b)$ .

4. 求证:  $\frac{a^2}{b^2} \geq \frac{a}{b}$ .

5. 已知  $a > b$ ,  $a > 0$  是任意实数, 且  $a > 0$ , 求证:

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

6. 证明  $a < b < c$ , 求证:  $a^2b + b^2c + c^2a < ab^2 + bc^2 + ca^2$ .

7. 证明  $f(x) = ax^2 + bx$ , 若满足  $-1 < f(1) < 2$ ,  $-1 < f(2) < 0$ , 则  $f(x)$  恒为负.

## 1.3 基本不等式

重点难点 用比较法来证明不等式



图 2-1

观察图 2-1 可知, 阴影部分的面积等于正方形面积的一半, 即  $S = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$ . 从而  $a = \frac{1}{2}$ , 即  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$ .

$$\text{即 } \frac{a}{b} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow a = b.$$

由此可知:

当  $a = b$  时,  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$ . 当  $a \neq b$  时, 从图 2-1 可知, 阴影部分的面积不等于正方形面积的一半, 即  $\sqrt{\frac{a}{b}} \neq \sqrt{\frac{b}{a}}$ . 由此可知:

“几何平均数”与“算术平均数”有以下性质: 当且仅当两个正数的算术平均数等于它们的几何平均数, 即  $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$  时,  $a = b$ . 由此可知, 当  $a \neq b$  时,  $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ . 由此可知, 当  $a \neq b$  时,  $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ . 由此可知, 当  $a \neq b$  时,  $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ .



图 2-2

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0). \quad (2)$$

证明 ① 当  $a = b$  时,  $\frac{a^2+b^2}{2} = \sqrt{ab}$ .

$$\begin{aligned} \therefore \frac{a^2+b^2}{2} &= \sqrt{ab} \\ &= \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{a})^2 \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{a})^2 = \sqrt{ab}. \end{aligned}$$

②  $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{ab}$  (当且仅当  $a = b$  时取等号).

设  $\frac{a^2+b^2}{2}$  为两个正数  $a, b$  的 **算术平均** (Arithmetic mean).

$\sqrt{ab}$  称为  $a, b$  的 **几何平均** (Geometric mean).

从式 (2) 可知, 两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数, 由此可知两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.

利用 (2) 可以推导出一些不等式.

$$\begin{aligned} \frac{a^2+b^2}{2} &\geq \sqrt{ab} \\ a^2+b^2 &\geq 2\sqrt{ab}. \end{aligned} \quad (3)$$

$$a^2+b^2 \geq 2\sqrt{ab} \quad (a, b \geq 0).$$

$$a^2+b^2 - 2\sqrt{ab} \geq 0.$$

得:

同学们还可以推导出一些不等式.

不等式 (3), 我们称为 **基本不等式** (Basic Inequality).

由此可知, 从式 (3) 可以推导出一些不等式, 利用不等式的基本性质可以得到一些新的不等式. 例如:

1. 由 (3) 得:

$$a^2+b^2+2ab \geq 2\sqrt{ab}+2\sqrt{ab}.$$

$$\text{即 } (a+b)^2 \geq 4ab.$$

$$\text{2. 由 } a^2+b^2 \geq 2\sqrt{ab} \text{ 得}$$

$$a^2+b^2 \geq 2\sqrt{ab}.$$

$$a^2 + a^2 \geq 2ab$$

类似, 再取以1, 可得

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

5. 当 $a > 0$ ,  $b > 0$ 时,

$$(1) \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2;$$

$$(2) (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{\frac{1}{ab}} = 4.$$

上面这些不等式的证明实际上也可以看作是发现过程. 从某种意义上讲, 当我们将经过验证条件出发, 以不等式的根本性质, 基本不等式为基础进行推导, 探索以至发现不等式的过程, 其实也就是对不等式给予证明.

例 设 $a, b$ 是正数, 求证:

$$(1) \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab};$$

$$(2) \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

证明 (1)  $\forall a, b$  为正数,

$$\Delta a+b \geq 2\sqrt{ab},$$

$$\Delta \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{2\sqrt{ab}}.$$

$$\Delta \frac{2ab}{a+b} \leq \frac{2ab}{2\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}.$$

$$(2) \forall (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 2(a^2 + b^2),$$

$$\Delta \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

$$\Delta \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

根据基本不等式的几何意义可知, 对于两个正数 $a, b$ , 有

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

在图 1-4 中,  $O$  为圆心:

$$|MP| + |MQ| = |MP| + |MQ| + |MR|,$$

即



图 1-4

设  $MP=a$ ,  $MQ=b$ ,  $a>b$ .

$$\text{则 } |MP| = a, \quad |MQ| = b, \quad |MR| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$|MP| = \frac{a+b}{2}, \quad |MQ| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

从而可得下列不等式:

### 双题 3

1. 设  $a, b, c$  为实数, 求证:

$$(1) \quad 3a^2 + 4b^2 + c^2 \geq a^2 + 2b^2 + c^2;$$

$$(2) \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2}.$$

2. 设  $a, b, c$  为实数, 且  $a, b, c$  为实数, 求证:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}.$$

3. 求证:  $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \geq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2}.$

4. 求证:  $a^2 + b^2 + c^2 \geq a^2 + b^2 + c^2.$

5. 设  $a, b, c$  为实数, 求证:  $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}.$

6. 设  $a, b, c$  为实数, 且  $a, b, c$  为实数, 求证:

$$(1) \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

### 1.4 基本不等式实际应用案例

**例1** 一家超市卖西瓜, 平均每天售出西瓜 1 吨, 已知每车西瓜的批发价为 14 元, 运费 1 元, 零售价为 10 元, 一辆车往由超市到户一天的运费为 0.14 元, 若要一次购西瓜的费用为 100 元, 西瓜的批发价为每箱 11 元, 以整箱批发, 问这家超市应向采用何种订货策略, 可使获利最大?

**解** 设每次订货  $x$  箱, 那么  $\frac{100}{x}$  天订货一次, 一次购西瓜的费用

$$100 + (14 + 1)x \quad (\text{元}),$$

平均每天量为  $\frac{100}{x}$  元, 在一个订货周期中, 每箱的运费

$$\frac{x}{100} \times 0.14 = \frac{14}{100}x \quad (\text{元}).$$

所以, 每天的总费用

$$\begin{aligned} T &= \frac{100 + 14x + 11x + 0.14x^2}{\frac{100}{x}} \\ &= \frac{100}{x} + 0.14x + 0.25x^2 \quad (\text{元}). \end{aligned}$$

根据基本不等式可得

$$\begin{aligned} T &\geq 2\sqrt{\frac{100}{x} \times 0.14x} + 0.25x^2 \\ &= 10.43 \quad (\text{元}). \end{aligned}$$

等号当且仅当  $\frac{100}{x} = 0.14x$ , 即  $x = 26.46$  时取得.

由于西瓜是整箱的, 因此分别计算 2 箱和 3 箱 (即  $x = 54$  和 72) 的结果.

当  $x = 54$  时,  $T = 10.47$ ;

当  $x = 72$  时,  $T = 10.43$ .

所以与表 4.1 中 4 箱, 每 24 天订货一次, 可获得最大

**例 4** 机动车过大桥, 为了安全, 同一车道上的两辆车的间距不得小于  $4t^2$ , 其中  $t$  是车速,  $l$  为平均车身长度,  $d$  为桥面宽度, 设固定, 车速为  $v$  km/h, 相邻车距为  $4t^2$ .

(1) 规定怎样的车速可使同一车道上的车流量最大? (车流量即单位时间内通过的车辆数.)

(2) 经过桥面的两辆平均车身长度为  $l$  m, 求同一车道上每小时的最大车流量.

**解** 设安全车距为  $d'$  m, 车速为  $v'$  辆/h, 则  $d' = 4t^2$ . 由  $v = 60$  km/h,  $d = 4t^2$ , 得  $d = \frac{1}{2}(\frac{v}{1000})^2$ . 车速为  $v$ , 若车速为 1 000 m/h, 车流量为  $\frac{1}{d} \cdot \frac{1000}{v}$ , 则

$$v = \frac{1000}{d+1} = \frac{1000}{4t^2+1} = \frac{1000}{\frac{1}{2}(\frac{v}{1000})^2 + 1} \leq \frac{1000}{\frac{1}{2} + 1}, \quad (2)$$

因此取

$$\frac{v}{1000} = \frac{1}{2},$$

即  $v = 500$  km/h 时车速平均, 此时车流量最大.

当  $l = 2$  m 时, 每小时的最高车流量为 1 000 辆.

## 习题 4

1. 一面积为 1 的矩形内任一点任意地作两条直线, 将矩形分成四块, 求四块面积最大? 最小面积是多少?

2. 有一矩形铁皮的面积, 随有一边长增加 12 m, 则面积比原来增加 84 m<sup>2</sup>, 问原铁皮的面积, 面积为 144 m<sup>2</sup>, 三边长多少?

(1) 若 1 m 的边长增加 1 m 则面积增加 10 m<sup>2</sup>.

(2) 若边 1 m 的边长增加 1 m 则面积增加 10 m<sup>2</sup> 则面积增加 10 m<sup>2</sup>.

问: 应如何利用铁皮才能造成面积最大?

3. 求生产产量, 产量随产量增加而增加, 产量从 1 吨到 10 吨, 产量从 1 吨到 10 吨, 产量从 1 吨到 10 吨, 产量从 1 吨到 10 吨.

同时可用于其他零件的质量, 使用通用汽车质量论坛系统, 为制造问题、制造中心提供一个知识库, 从而减少不良, 它和通用汽车质量论坛一起, 将制造中心、通用汽车和汽车制造商一起, 同时制造中心和通用汽车质量论坛一起, 通过通用汽车质量论坛 (通用汽车质量论坛的质量) + 通用汽车质量论坛 (通用汽车质量论坛的质量)



## 阅读与思考

### 算术平均数与几何平均数

设  $a$  与  $b$  是两个非负实数,  $a \geq b$ , 则

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad a_2 = \sqrt{ab}.$$

则  $a_1, a_2$  必定也是非负数, 且

$$a_1 = \left(\frac{a+b}{2}\right) \geq a, \quad a_2 = \sqrt{ab} \geq b.$$

使用递推不等式①, 可知  $a_1 \geq a_2$ , 所以

$$a_3 = \frac{a_1+a_2}{2}, \quad a_4 = \sqrt{a_1 a_2}.$$

继续用  $a_1, a_2$  重复上述步骤, 因此, 有

$$a \geq a_1 \geq a_3, \quad b \geq a_2 \geq a_4$$

且

$$a_1 \geq a_2;$$

继续推得下去, 一般地, 我们可用递推公式

$$a_n = \frac{a_{n-1} + \frac{b}{a_{n-1}}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}} \quad (2)$$

定义  $a_n, b_n$ .

使用递推公式时, 得到数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  及  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . 它们满足

$$a \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n-1} \geq a_n \geq b_n \geq b_{n-1} \geq \dots \geq b_2 \geq b_1 \geq b.$$

例如, 当  $a=1, b=1$ , 使用递推公式  $a_n$  与  $b_n$  表示递推数列 (如图 1-1), 可以得到: 由图可知该数列由中,  $a$  最小而  $a$  最大, 并且所有  $a_n$  小于所有  $b_n$ .



图 1-1

值函数应用函数公式定义及收敛条件中的  $a$  与  $b$ , 使得定义所得一列  $a_1, b_1$  满足任意一列  $a_2, \dots, b_2$  区间. 于是, 通常有理由认为数列  $a_n$  随着  $n$  增大而减小, 使得对于每一个  $k$ , 总存在  $n$  属  $n$  区间的数  $k$ . 类似地, 这些  $b_n$  随着  $n$  增大而增大, 使得对于每一个  $a_n$ , 总存在  $n$  属  $n$  区间的数  $k$ . 实际上,  $A$  就是实数数列  $\{a_n\}$  的极限, 即数列  $a_n$  的极限  $A$  的极限.

此外, 还有

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^n - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^n = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^n \\ &= \frac{1}{2} (a_n - b_n). \end{aligned}$$

这说明, 当  $a_n \rightarrow b_n$  时  $a_n$  增大而减小, 数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  具有相同极限, 即  $A = B$ . 而且  $A$  和  $B$  是数列  $a_n$  和  $b_n$  的极限, 所以  $a_n$  和  $b_n$  也是数列  $A$  和  $B$  的  $a_n$  与  $b_n$  的极限. 大数学家高斯曾指出, 这个定理不仅是一个证明技巧的技艺, 而且在数学上具有实际意义, 它可以用来构造一个叫做“柯西收敛性”的收敛性定理.

## 1.3 分析法与综合法

### 数学实验

让表格告诉你计算一些数的平方根，因此也就知道怎样平方根逼近。

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sqrt{n}$	1	1.41	1.73	2	2.24	2.45	2.65	2.83	3	3.16
$\sqrt{n-1} \cdot \sqrt{n+1}$	1	1.41	1.73	1.96	2.24	2.45	2.65	2.83	3.14	3.16

不难看出，随着  $n$  的增大， $\sqrt{n-1} \cdot \sqrt{n+1}$  越来越小，我们记

$$\sqrt{n-1} \cdot \sqrt{n+1} < \sqrt{n+1} = \sqrt{n+1}, \quad (1)$$

上式对于  $n \geq 2$  是否总是成立还有待于证明，直接证明不是很便利，为此我们改变一下原不等式：

取倒数，得

$$\sqrt{n} + \sqrt{n-2} < 2\sqrt{n-1}.$$

又只需证

$$(\sqrt{n} + \sqrt{n-2})^2 < 4(n-1),$$

即证

$$\sqrt{n} + \sqrt{n-2} < 2(n-1). \quad (2)$$

为此只需证

$$n(n-2) < (2n-2)^2,$$

即

$$n^2 - 2n < 4n^2 - 8n + 4. \quad (3)$$

该式一定成立，因此不等式(2)成立。

上述证明是从原不等式出发，找“第”做“因”，层层递进，寻找使成立的条件，直至找到一个使这些条件已经具备为止。进而断定原不等式成立，我们把这种直接称之为 **分析法** (analysis method)。

同样一个不等式的证明，即使都是分析法，其思路过程可能不一样，对于证式我们也可以选择考虑。

使用公式，并证明

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})}{(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})} \leq \frac{(\sqrt{a-1}-\sqrt{a-2})(\sqrt{a-1}+\sqrt{a-2})}{(\sqrt{a-1}+\sqrt{a-2})}.$$

即 
$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{a-1}+\sqrt{a-2}}.$$

为此，并证明

$$\sqrt{a}+\sqrt{a-1} > \sqrt{a-1}+\sqrt{a-2}. \quad (2)$$

①式成立十分明显，因此②式便证。

**例1** 已知 $a, b$ 是两个不相等的正数，求证：

$$3a+4b(a^2+b^2) > 4a^2+b^2. \quad (2)$$

**证法1**  $3a+4b(a^2+b^2) > 4a^2+b^2$  (欲证)  $\Leftrightarrow$

$$3$$

$$a^2+b^2+a^2b+ab^2 > a^2+3a^2b+b^2 \quad (\text{移项})$$

$$3$$

$$a^2b+ab^2 > 3a^2b \quad (\text{移项})$$

$$3$$

$$b > 3a, \quad b > 0$$

$$a^2+b^2 > 3ab. \quad (\text{移项}) \quad (3)$$

由基本不等式或 $a^2+b^2 \geq 2ab$ 的变形，得此式式成立，从而②式成立。

**例1** 例1中所到达的证法上而下均运用分析法的思考过程的模式（以后遇到类似题型不再说明）。

基于上述分析法的证明，例1还可以按例1例如下证明：

**证法2**  $a^2+b^2 > 3ab$  (欲证)  $\Leftrightarrow$

$$+a^2b+ab^2 > 3a^2b \quad (a > 0, b > 0)$$

$$+a^2b+b^2+a^2b+ab^2 > a^2+3a^2b+b^2$$

$$+3a+3b(a^2+b^2) > 4a^2+b^2.$$

上述证明的思路很清晰可以认为分析法的证明相反，它从已知的基本不等式出发，向目标不等式的条件性质导出欲证的不等式，这种证明方法称为**综合法**（*synthesis method*），所谓综合法就是由“因”导“果”，从题设条件出发，向目标结论证，公理、定理等逐步推进，从而得出要证的结论的方法。

例2 求证:  $\sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{5} + \sqrt{6}$ .

分析 四组合数不等式和整数的关系是问题的关键, 所以部分用比较法求证的途径.

证法1 比较法.

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{5} + \sqrt{6} \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 < (\sqrt{5} + \sqrt{6})^2 \\ \Leftrightarrow & 2 + 3 + 2\sqrt{6} < 5 + 6 + 2\sqrt{30} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{6} < \sqrt{30} \\ \Leftrightarrow & 1 < 5. \end{aligned}$$

最后一步不等式成立, 故原不等式成立.

基于上述分析思路证明, 我们还可以给出例2的组合法证明.

证法2 组合法.

$$\begin{aligned} & 1 < 5 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{1} < \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow & 1 + 3\sqrt{1} < 3 + 3\sqrt{5} \\ \Leftrightarrow & 4\sqrt{1} + \sqrt{1}^2 < 4\sqrt{5} + \sqrt{5}^2. \end{aligned}$$

因为  $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 0$ ,  $\sqrt{5} + \sqrt{6} > 0$ ,

故由  $\sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{5} + \sqrt{6}$ .

在上例中, 我们最理想地从“ $1 < 5$ ”入手, 用组合法比较构造, 因此先构造整数的关系用组合法, 然后用综合法的形式写出证明过程. 这是解决数学问题的一种重要思想方法.

有时也可分析法. 综合法组合法证明, 就好像有两个人走路, 一个人从通向的入口走向出口, 另一个人从通向出口走向入口, 争取点距离就会. 实际上, 一个不等式的证明的成功类型是分析法和综合两种方法交替运用的结果.

例3 已知  $0 < a < 1$ ,  $x^2 + y = 0$ , 求证:

$$\log_2 2x^2 + y^2 > 2 \log_2 2 + \frac{1}{2}. \quad \textcircled{2}$$

分析有留数  $(2+\log_2(x^2+e^2))(\log_2(2+e^2))$

$$\geq (2+2\ln 2)(2+e^2)$$

$$x^2+e^2(2e^2+e^2)$$

$$\geq$$

$$e^2\left(\frac{1}{2}+2\right)2e^2$$

$$\geq 2\ln 2(2+e^2)$$

$$\sqrt{x^2+e^2}2e^2$$

$$\geq$$

$$e^2\left(\frac{1}{2}+2\right)\frac{1}{2}$$

$$\geq$$

$$x+2e^2\frac{1}{2}.$$

证

$$\because x^2+y=0,$$

$$\therefore x+y=x-x^2=x(1-x),$$

根据基本不等式, 有

$$x(1-x)\leq\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-x^2=\frac{1}{4},$$

$\therefore$  ②式成立, 从而③式也成立.

### 变式 8

1. 设函数  $f(x)$  为  $x$  的二次函数, 求证:  $f(x) \geq 0$ .
2. 设函数  $f(x)$  为  $x$  的二次函数, 求证:  $f(x) \geq 0$ .

证明:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , 则  $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$ .

3. 设  $a > 0$ ,  $b > 0$ , 求证:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \geq 2\sqrt{a} + 2\sqrt{b}.$$

4. 设  $a > 0$ ,  $b > 0$ , 求证:

$$a + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \geq 4.$$



**证明** 假设  $a, b, c$  不同时都为正数, 不妨先考虑  $a < 0$  的情况, 即令  $a = -a' < 0$  再证明.

(1) 当  $a' = 0$  时,  $abc = 0$ , 与已知  $abc > 0$  相矛盾;

(2) 当  $a' < 0$  时,

$$\because abc > 0, \therefore bc < 0,$$

$$\text{设 } b = b', c = c',$$

$$\therefore b' + c' = -a' > 0,$$

$$\therefore ab' + bc' + ac = a'b' + c' + bc' < 0,$$

这与已知  $ab' + bc' + ac > 0$  矛盾.

综上所述知  $a > 0$  成立.

同理可证  $b > 0, c > 0$  成立, 原命题得证.

反证法是常用数学命题. 实际上是用证明逆命题成立来代替证明原命题成立. 有的命题从命题的已知条件出发不易推理或证明, 而反命题却又很清晰, 经过一番容易推理、论证, 就可尝试用反证法命题 (如例 1). 用反证法证明不等式须注意一点, 就是肯定了原命题的不等式以后, 所得的命题只是否定一种情形 (因为“ $>$ ”的否定是“ $<$ ”, 而不是“ $<=$ ”), 在证明时勿加忽略.

**例 1** 是不等式证明的基本方法, 在不等式证明中几乎无时不在. 它的本质是不等式的性质传递: “若  $a > b, b > c$ , 则  $a > c$ .” 一般可考虑用数学归纳法、单调性、已知不等式及函数的单调性等将原不等式拆分成若干点再进行放缩缩小.

**例 2** 求证:  $\log_2 3 < \log_3 4$ .

**证明**  $\because \log_2 3 = \log_2 2^{\log_2 3} > \log_2 2^{\log_3 3}$ ,

$$\text{而 } 2^{\log_2 3} = \log_2 3 = \log_2 4^{\log_3 3/2},$$

$$\therefore \log_2 3 < 2\log_3 4.$$

**例 3** 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正数, 求证:

$$\frac{a_1}{(a_1 + a_2)^2} + \frac{a_2}{(a_2 + a_3 + a_1)^2} + \dots + \frac{a_n}{(a_n + a_1 + \dots + a_{n-1})^2} \geq \frac{1}{a_1}.$$

例题 3 用基本不等式求  
最值，要特别注意“积定  
和为最值”。

$$\begin{aligned}
 \text{证明} \quad & \text{左边} < \frac{a_1^2}{a_1(a_1+a_2)} + \frac{a_2^2}{a_2(a_2+a_3)} + \cdots + \\
 & \frac{a_n^2}{(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})(a_1+a_2+\cdots+a_n)} \\
 & \quad (\text{分母减小，分式则值增大}) \\
 & = \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1+a_2} \right) + \left( \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_2+a_3} \right) + \cdots + \\
 & \quad \left( \frac{1}{a_{n-1}+a_n} - \frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \right) \\
 & = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} < \frac{1}{a_1} = \text{右边}.
 \end{aligned}$$

得证。

变式本题的主要思想是构造，为熟悉基本不等式（积定和为最值），直接构造或赋值构造法的基本策略。

## 例 4

用基本不等式。

1.  $a, b, c > 0$ ,  $a$  为定值, 则  $a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2\sqrt{\frac{a}{bc}}$ .
2. 若  $a, b$  为定值, 且  $a + b > 0$ , 则  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$  当且仅当  $a = b$  时成立.
3. 若  $a, b$  为定值, 且有  $ab > 0$ , 则  $a + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}$ .
4. 若  $a > 0, b, c < 0$ , 则以下命题 (1)  $a + b, (2) a + c, (3) a + bc$  不能同时  $\geq \frac{1}{2}$ .

用基本不等式。

1.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{1}{c}$ .
2. 若  $a, b, c$  为定值,  $a + b + c > 0$ , 且  $a + b + c > 0$ , 则  $a + b + c \geq \frac{1}{2}$ .

## 第2章

# 绝对值不等式



在不等式的应用中，经常涉及重量、面积、体积等，也涉及基础数学对象（如函数、向量）的大小或者绝对值，它们都是通过非负数来度量的。

本章回顾绝对值的概念和性质，讨论绝对值不等式及其几何意义。

1.  $|x|$  表示数轴上表示  $x$  的点与原点之间的距离, 称为绝对值.

1.  $|ab| = |a| \cdot |b|$ .

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

2.  $|a| + |b| \geq |a+b| \geq |a| - |b|$ .

1. 绝对值的几何意义.

如图 2-1-1 所示, 在  $x$  轴上表示  $x$  的点与表示 0 的点之间的距离称为  $x$  的绝对值.



图 2-1-1

如图 2-1-2 所示, 在  $x$  轴上表示  $x$  的点与表示  $a$  的点之间的距离称为  $x$  与  $a$  的差的绝对值.



图 2-1-2

1.  $|x-a|$  表示  $x$  与  $a$  的差的绝对值, 即表示  $x$  与  $a$  之间的距离.

## 3.1 含有绝对值的不等式

知识链接

$$|ax| = \begin{cases} ax, & ax \geq 0, \\ -ax, & ax < 0, \end{cases}$$

因此, 有

$$-|a| \leq ax \leq |a|. \quad (1)$$

特别地,

$$-|a| \leq 0 \leq |a|. \quad (2)$$

(1)、(2)相加得

$$-|a| + (-|a|) \leq ax + 0 \leq |a| + |a|,$$

即

$$|a| + |a| \leq |a| + |a|. \quad (3)$$

进而得见,  $a$  与 0 同号或有一个为 0 时, (3)式等号成立.

由(3)得

$$|a| = |a| + |a| - |a| \leq |a| + |a| + (-|a|).$$

即

$$|a| = |a| \leq |a| + |a|. \quad (4)$$

(对科学记号求绝对值时成立)

综合(1)、(2)我们得到有关 **绝对值** absolute value 的重要不等式

$$|a| = |a| \leq |a| + |a| \leq |a| + |a|.$$

例 1 已知  $|x| < \frac{5}{4}$ ,  $|y| < \frac{5}{4}$ , 求证:

$$|3x+y| < 5.$$

证明 由  $|3x+y| \leq |3x| + |y| = 3|x| + |y|$

及  $|x| < \frac{5}{4}$ ,  $|y| < \frac{5}{4}$ ,

$$\therefore |3x+y| < 3 \cdot \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = 5.$$

例 2 已知  $f(x) = x^2 - x + a$ ,  $|a - a'| < 1$ , 求证:

$$|f(x)| = |f(a') + (2a' - 1)(x - a')|$$

**证明**  $|f(x)| = |f(a)|$

$$= |(3a^2 - a + a) - (3a^2 - a + a)|$$

$$= |(3a - a)(x + a - 1)|$$

$$= |x - a| \cdot |x + a - 1|.$$

$\forall |x - a| < 1,$

$\therefore |f(x) - f(a)| < |x + a - 1|.$

$\forall |x + a - 1| = |(x - a) + (a + 1)|$   
 $\leq |x - a| + |a + 1 - 1|$   
 $\leq 1 + |a| + 1$   
 $= 2(|a| + 1).$

$\therefore |f(x) - f(a)| < 2(|a| + 1).$

**例3** 已知  $x$  为不等于 0 的实数, 求证:

$$\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2.$$

**证明**  $\forall x$  与  $\frac{1}{x}$  同号,

$$\therefore \left|x + \frac{1}{x}\right| = |x| + \left|\frac{1}{x}\right|.$$

根据基本不等式, 有

$$\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2\sqrt{|x| \cdot \frac{1}{|x|}} = 2.$$

**例4** 已知  $|a| < 1, |b| < 1$ , 求证:

$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right| < 1.$$

**证明**  $\left|\frac{a+b}{1+ab}\right| < 1$

$\Leftrightarrow$

$$|a+b| < |1+ab|$$

$\Leftrightarrow$

$$|a+b|^2 < |1+ab|^2$$

$\Leftrightarrow$

$$a^2 + |ab| + b^2 < 1 + |ab| + a^2b^2$$



$$(3a+3b-3a-3b)<0,$$

2. 证明: 若  $a < \frac{1}{2}$ ,  $1-b < \frac{1}{2}$ , 则证:

$$(1) 1/a + 1/b < 1/a + 1/b < 2a;$$

$$(2) 1/a + 1/b < 1/a + 1/b < 2b.$$

3. 证明:  $3a - a^2 < 0$ ,  $3b - a^2 < 0$ ,  $3a - ab < 0$ ,  $3b - ab < 0$ , 则证:

$$(1) \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{ab} < ab < 2a$$

$$(2) \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{ab} < ab < 2b$$

4. 证明:

$$(1) (a-b)^2 + (a-b)(2a-b) < 0$$

$$(2) (a-b)^2 + (a-b)(2a-b) < 0$$

5. 设  $a, b$  为实数,  $c > 0$ , 证明:

$$(a+b)^2(a^2+b^2) + (1+\frac{1}{c})^2(a^2b^2)$$

6. 证明:  $\left| \frac{x^2-y^2}{x} \right| > |x-y|$ .

### 3.1 解含绝对值的不等式举例

解含绝对值的不等式主要依据绝对值的定义、几何意义及不等式的基本性质。

**例1** 解不等式

$$|x-2| - 2x < 3.$$

**解** 原不等式可化为

$$|x-2| + 2x < 5,$$

即

$$\begin{cases} x-2+2x < 5, \\ x-2+2x < 5. \end{cases}$$

①

②

由①得

$$3x-2 < 5,$$

或

$$3x-2 < -5.$$

解得

$$x < \frac{7}{3} \text{ 或 } x < -\frac{3}{3}.$$

由方程

$$-5 < 2x - 3 < 5,$$

解得

$$-1 < 2x < 8.$$

综上所述, 原不等式的解集为  $(-1, 4)$ .

故原可解不等式变为

$$\frac{1}{2} < \left| x - \frac{3}{2} \right| < \frac{5}{2}.$$

如图 2-3, 根据绝对值在数轴上的表示可知不等式的解集为  $(-1, 1) \cup (5, 4)$ .



图 2-3

例 2 解不等式

$$(2x+1)(2x-3) \leq 4.$$

解 由  $2x+1$ ,  $2x-3$  的零点分别为  $-\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{2}$ , 它们在区间  $(-\infty, -\frac{1}{2})$ ,  $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ ,  $(\frac{3}{2}, +\infty)$  内的符号如图 2-4 所示. 于是可根据绝对值的定义分段讨论.



图 2-4

解 (1) 当  $x < -\frac{1}{2}$  时, 原不等式可变为

$$-(2x+1) = (2x-3) \leq 4,$$

解得

$$x \leq -\frac{1}{2}.$$

(2) 当  $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$  时, 原不等式可变为

$$(2x+1) = (2x-3) \leq 4,$$

解

$$x + x^2 \geq 0,$$

此不等式恒成立. 故当时  $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ .

(2) 当  $x > \frac{3}{2}$  时, 原不等式可变为

$$(2x+3) + (2x-3)(x-1).$$

解得  $x \geq \frac{3}{2}$ .

综上所述, 原不等式的解集为  $\mathbf{R}$ .

可是同学们对最后求得的结果一点也不感到意外, 这是因为我们从另一个角度得到

$$\begin{aligned} & |2x+3| + |2x-3| \\ &= 2\left|x+\frac{3}{2}\right| + \left|\frac{3}{2}-x\right| \\ &\geq 2\left|x+\frac{3}{2}\right| + \left|\frac{3}{2}-x\right| \\ &= 4. \end{aligned}$$

这是一个恒成立的不等式, 与  $x$  的取值无关!

例3 解不等式

$$(2x^2-1) \geq x.$$

解 设  $y_1 = (2x^2-1)$ ,  $y_2 = x$ , 分别作出两个函数的图像(如图 2-5).

$y_1$  与  $x$  轴交点为  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ ,  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ .

在区间  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  内,  $y_1 = 1-2x^2$  与

$y_2 = x$  的图像的交点的横坐标为  $x = \frac{1}{2}$ ;

在区间  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$  内,  $y_1 = 2x^2-1$  与  $y_2 = x$  的图像的交点的横坐标为

$x=2$ . 由图 2-5 可知不等式的解集为  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup (2, +\infty)$ .



图 2-5

## 习题 10

1. 将下列方程化简:

(1)  $(2x+1)(2x-1)$

(2)  $(3x+1)(3x-1)$

(3)  $(x+1)(x+1)(x+1)$

2. 将关于  $x$  的方程  $(x+1)(x+1)(x+1)(x+1)$  化简.

3. 将方程  $(x+1)(x+1)(x+1)(x+1)(x+1)(x+1)(x+1)(x+1)$  化简.

4. 将下列方程化简: (1)  $x^2+1$ , (2)  $x^2+2$ , (3)  $x^2+3$ , (4)  $x^2+4$ , (5)  $x^2+5$ , (6)  $x^2+6$ , (7)  $x^2+7$ , (8)  $x^2+8$ , (9)  $x^2+9$ , (10)  $x^2+10$ , (11)  $x^2+11$ , (12)  $x^2+12$ , (13)  $x^2+13$ , (14)  $x^2+14$ , (15)  $x^2+15$ , (16)  $x^2+16$ , (17)  $x^2+17$ , (18)  $x^2+18$ , (19)  $x^2+19$ , (20)  $x^2+20$ , (21)  $x^2+21$ , (22)  $x^2+22$ , (23)  $x^2+23$ , (24)  $x^2+24$ , (25)  $x^2+25$ , (26)  $x^2+26$ , (27)  $x^2+27$ , (28)  $x^2+28$ , (29)  $x^2+29$ , (30)  $x^2+30$ , (31)  $x^2+31$ , (32)  $x^2+32$ , (33)  $x^2+33$ , (34)  $x^2+34$ , (35)  $x^2+35$ , (36)  $x^2+36$ , (37)  $x^2+37$ , (38)  $x^2+38$ , (39)  $x^2+39$ , (40)  $x^2+40$ , (41)  $x^2+41$ , (42)  $x^2+42$ , (43)  $x^2+43$ , (44)  $x^2+44$ , (45)  $x^2+45$ , (46)  $x^2+46$ , (47)  $x^2+47$ , (48)  $x^2+48$ , (49)  $x^2+49$ , (50)  $x^2+50$ , (51)  $x^2+51$ , (52)  $x^2+52$ , (53)  $x^2+53$ , (54)  $x^2+54$ , (55)  $x^2+55$ , (56)  $x^2+56$ , (57)  $x^2+57$ , (58)  $x^2+58$ , (59)  $x^2+59$ , (60)  $x^2+60$ , (61)  $x^2+61$ , (62)  $x^2+62$ , (63)  $x^2+63$ , (64)  $x^2+64$ , (65)  $x^2+65$ , (66)  $x^2+66$ , (67)  $x^2+67$ , (68)  $x^2+68$ , (69)  $x^2+69$ , (70)  $x^2+70$ , (71)  $x^2+71$ , (72)  $x^2+72$ , (73)  $x^2+73$ , (74)  $x^2+74$ , (75)  $x^2+75$ , (76)  $x^2+76$ , (77)  $x^2+77$ , (78)  $x^2+78$ , (79)  $x^2+79$ , (80)  $x^2+80$ , (81)  $x^2+81$ , (82)  $x^2+82$ , (83)  $x^2+83$ , (84)  $x^2+84$ , (85)  $x^2+85$ , (86)  $x^2+86$ , (87)  $x^2+87$ , (88)  $x^2+88$ , (89)  $x^2+89$ , (90)  $x^2+90$ , (91)  $x^2+91$ , (92)  $x^2+92$ , (93)  $x^2+93$ , (94)  $x^2+94$ , (95)  $x^2+95$ , (96)  $x^2+96$ , (97)  $x^2+97$ , (98)  $x^2+98$ , (99)  $x^2+99$ , (100)  $x^2+100$ .



## 问题与思考

## 距离的性质

## 1. 欧氏距离

在平面直角坐标系中, 点  $P(x_1, y_1)$  与点  $Q(x_2, y_2)$  之间的标准距离为欧氏距离, 记为  $d(P, Q)$ , 由公式

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1)$$

给出.

下面我们研究距离的性质.

(1) 两点间的距离只依赖于这两个点的相对位置, 而与坐标无关. 由距离公式  $x_2 - x_1$  与  $y_2 - y_1$  这个距离称为水平与垂直 (即当这两个点沿同一方向移动时) 的距离时, 它是与坐标距离无关.

(2) 从点  $P$  到点  $Q$  的距离等于从点  $Q$  到点  $P$  的距离, 这可以通过图中验证.

$$d(P, Q) = d(Q, P)$$

事实上, 性质 (2) 通常称为距离函数的对称性.

(3) 距离满足 (1) 所述的三角不等式.

$$d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R). \quad (2)$$

这里, 点  $Q$  为平面上的任一点, 即如图 1.2.3(a) 所示.

$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \geq \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$  不等式 (2) 通常称为平面三角不等式.

(4) 任意两点  $P$  与  $Q$  间的距离是非负的, 即

$$d(P, Q) \geq 0$$

当且仅当  $P$  与  $Q$  两点重合时, 等号成立, 这个性质通常称为距离函数的非负性. 这一点由公式 (1) 显然可得.

(5) 如果  $P$  点坐标为  $(x, y)$ ,  $Q$  点坐标为  $(x_0, y_0)$ , 其中  $x_0$  为—

任意位置，那么

$$\sin(\angle QP) = \sin(\angle RP);$$

这是由平面几何的“同角”这个性质所决定的（该性质的表述，见式(2.1)）。因为

$$\begin{aligned} \sin(\angle QP) &= \sqrt{\sin^2 P + \cos^2 P} = \sqrt{\cos^2 P + \sin^2 P} \\ &= \cos \sqrt{P^2 + P^2} = \cos(\angle RP). \end{aligned}$$

因此距离还有一个性质：

(3) 在  $\mathbb{R}^2$  平面内取点或线某个角度，则同角同角距离相等。这个性质称为“同角平面性”。

### 2. 距离度量问题

还可以定义许多其他使用距离的“非欧”距离。由于篇幅所限，这里只讨论一种。一个函数或距离是我们用距离来度量距离的度量。这个函数称为“距离函数”，通常称为“距离函数”。

作为一个例子，可以构造距离函数  $d(x_1, y_1, x_2, y_2)$  为  $d(x_1, y_1, x_2, y_2)$  的函数。这个函数称为一个“距离函数”，它定义了两个距离函数是严格距离函数，或者是严格距离函数，并且使用它可以得到，如图 2-1。



图 2-1 距离函数度量

从  $P$  到  $Q$  的距离函数式(2.1)的表达式由水平距离及垂直距离组成。这种距离函数称为“距离函数”，从  $P$  到  $Q$  的距离函数称为“距离函数”，从  $P$  到  $Q$  的距离函数称为“距离函数”，从  $P$  到  $Q$  的距离函数称为“距离函数”。

$$d(PQ) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|. \quad (2.2)$$

严格来说，这个函数并不满足距离函数的性质，图 2-1 就是一例。即点  $P$ 、 $Q$  同位于不同的两条垂直线（或垂直线）上，此时：

行人由点*P*沿图中被道路限制走，于是只能经过两圆周的交点*A*和*B*中的某一点*A*或*B*。因此，如果两圆半径相等，也就是两圆彼此相离或彼此相切，那么点*A*和*B*重合了，也就是点*A*，如果仅圆*P*比圆*Q*大，那么图中主要方向即点*A*而不是点*B*和*B*和*A*，那么此时两圆被圆*P*所交点*A*和圆*Q*所交点*B*均位于圆*P*内。



图 1-2 两圆被限制圆

因此，如果圆*P*和圆*Q*彼此相离或彼此相切，那么圆*P*和圆*Q*的交点*A*和*B*重合，那么此时两圆被圆*P*所交点*A*和圆*Q*所交点*B*均位于圆*P*内。

下面我们来考虑由圆*P*和圆*Q*所交点*A*和*B*所交点*A*和圆*Q*所交点*B*均位于圆*P*内。

因为圆*P*和圆*Q*中凡包含圆*P*和圆*Q*，那么圆*P*和圆*Q*的交点*A*和*B*均位于圆*P*内，那么圆*P*和圆*Q*的交点*A*和*B*均位于圆*P*内。

因为圆*P*和圆*Q*的交点*A*和圆*Q*的交点*B*均位于圆*P*内，那么圆*P*和圆*Q*的交点*A*和圆*Q*的交点*B*均位于圆*P*内。

为了验证上述结论是否成立，

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

设*P*、*Q*两圆的圆心分别为*P*(*x*<sub>1</sub>, *y*<sub>1</sub>)、*Q*(*x*<sub>2</sub>, *y*<sub>2</sub>)、*C*(*x*<sub>3</sub>, *y*<sub>3</sub>)，则

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}, \end{aligned}$$

那么圆*P*和圆*Q*的交点*A*和圆*Q*的交点*B*均位于圆*P*内。

因为圆*P*和圆*Q*的交点*A*和圆*Q*的交点*B*均位于圆*P*内，那么圆*P*和圆*Q*的交点*A*和圆*Q*的交点*B*均位于圆*P*内。

因此，圆*P*和圆*Q*的交点*A*和圆*Q*的交点*B*均位于圆*P*内。

$$|x_1| + |y_1| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

### 第3章

## 数学归纳法与不等式证明



数学归纳法是证明关于自然数的有关命题的重要方法,本章学习数学归纳法和它的应用.

### 3.1 数学归纳法

关于基本不等式

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2},$$

知图中

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2}, \quad b = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} a,$$

其中  $a_1/a_2 = 1, 2, 3, 4$  都是自然数, 那么我们就得到

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt{\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2}},$$

$$\text{即} \quad \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt{\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2}}, \quad (1)$$

再应用基本不等式, 得

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2},$$

$$\frac{a_3 + a_4}{2} \geq \sqrt{a_3 a_4}.$$

代入(1), 即进一步得到不等式

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt{\sqrt{a_1 a_2} \cdot \sqrt{a_3 a_4}} = \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}.$$

等等, 当且仅当  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$  时成立.

这又是一个有趣的发现!

一个自然的思想是: 对于任意给定的非负实数  $a_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 下面不等式

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

是否也成立? 不妨尝试一下!

如果继续继续下去, 显然可以对  $n$  做无穷递增:  $2^1, 2^2, 2^3, \dots$ , 一建立类似的不等式

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

这里 $a_i (i=1, 2, \dots, n)$ 都是非负实数。

不过，这是一个有待证明的一般性命题，不等式证明有待于严谨证明。这项工作可以用**数学归纳法** (mathematical induction) 来完成。

何谓数学归纳法？

大概每个人都通过过“多米诺骨牌”，靠倒下一块骨牌，它会影响第二块，再带动第三块，……直到所有骨牌全部倒下。我们是将骨牌看作一系列无穷多个编号为 $P_1, P_2, P_3, \dots$ ，假定满足下列命题：

(1) 初始骨牌的一个命题正确；

(2) 假设 $n$ 由一个命题到正确命题可以推出它的下一个命题的正确性。

那么由此便证明了这一列所有命题的正确性。事实上，我们将已会“推倒第一块骨牌”，即证明命题的一个命题成立 (所谓“奠基”)。而“连续”倒放成流“每一块骨牌倒下时都将带动下一块骨牌”，这样一来，我们就不需要再考虑两块连续倒落一块骨牌，事实上，只要第一块一倒下，那么行列中的任何一块骨牌都成流乎必然倒下。

上述事例启发我们，在证明一个与自然数有关的命题时，可采用下面两个步骤：

(1) 证明  $n=1$  时命题成立；

(2) 证明：如果  $n=k$  时命题成立，那么  $n=k+1$  时命题也成立。

依照第(1)、(2)步原理，根据(1)知  $n=1$  时命题成立，再根据(2)知  $n=1+1=2$  时命题成立，从而  $n=2$  时命题成立。依此(2)知  $n=2+1=3$  时命题成立。这样继续下去，便可知知道对任何正整数  $n$  命题成立。

这就是用数学归纳法证明数学问题的方法。

**例 1** 已知  $n$  为正整数，求证：

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

**证明** (1) 当  $n=1$  时，左边 $=1$ ，右边 $=1$ ，等式成立；

(2) 假定当  $n=k$  时，等式成立，则

$$1+2+3+\cdots+n(2n-1)=n^3.$$

那么

$$\begin{aligned} & 1+2+3+\cdots+(2n-1)+[2n+1-1] \\ &=n^3+[2n+1-1] \\ &=n^3+2n+1 \\ &=(n+1)^3. \end{aligned}$$

这说明  $n=k+1$  时等式也成立.

根据(1)和(2), 可知等式对任何正整数  $n$  都成立.

由上面例证中, “证明  $n=1$  时等式成立”这一步称为初始步骤, “由  $n=k$  时等式成立, 推出  $n=k+1$  时等式也成立”, 这一步称为递推步骤. 由“假设  $n=k$  时等式成立”称为归纳假设. 数学归纳法的实施中上述二步骤缺一不可. 而按常用的归纳假设的证明方法不会是数学归纳法.

例2 设  $n$  为正整数, 求证:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\left[n\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^2.$$

证明 (1) 当  $n=1$  时, 左边  $=1^2=1$ , 右边  $=\left[1\left(1+\frac{1}{2}\right)\right]^2=1$ , 等式成立;

(2) 假设  $n=k$  时等式成立, 则

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\left[k\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]^2.$$

那么

$$\begin{aligned} & 1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 \\ &= \left[k\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]^2+(k+1)^2 \\ &=k^2+k\left[\frac{k}{2}+k+1\right] \\ &=k^2+k\left[\frac{3k+2}{2}\right] \\ &= \left[k+\frac{1}{2}\left(3k+2\right)\right]^2. \end{aligned}$$

这说明  $n=k+1$  时等式成立.

根据(1)和(2), 可知等式对任何正整数  $n$  都成立.

## 例 9

1. 已知  $n$  为正整数, 求证:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

2. 已知  $n$  为正整数, 求证:

$$\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)^2\leq\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}.$$

3. 已知  $n$  为正整数, 求证:

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2=0-1^2+2^2-3^2+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}.$$

## 3.1 数学归纳法证不等式

数学归纳法是证明不等式的重要方法.

例 1 已知  $n$  为不小于 1 的正整数, 求证:  $2^n > 2n+1$ .

分析 根据题, 数学归纳法证题只需证明对于不小于 1 的正整数  $n$  成立. 因此, 我们可能想到从中间“ $n=1$ ”改为“ $n=2$ ”.

$n=1$  时不等式成立是十分明显的.

无妨由  $n=2$  起, 根据归纳假设, 有

$$2^n > 2n+1. \quad (1)$$

而欲证不等式为

$$2^{n+1} > 2(n+1)+1.$$

即证

$$2 \cdot 2^n > 2(n+1)+1. \quad (2)$$

比较式(1), 只需证

$$2^n > n.$$

这显然成立.

证明 (1)  $n=1$  时, 左边  $=2^1=2$ , 右边  $=2 \times 1+1=3$ , 不

式成立.

(2) 假设  $n=4$  时不等式成立, 则是

$$2^n > 2n+1.$$

$$\text{即证 } 2^4=2^2+2^2 > 2 \times 4+1=9=2 \times 3+1+1.$$

证表明  $n=4+1$  时不等式也成立.

根据(1),(2) 知对于一切不小于3的正整数  $n$  不等式成立.

例2 已知  $n$  为正整数, 求证:

$$\sqrt{1 \cdot 2} + \sqrt{2 \cdot 3} + \cdots + \sqrt{(n-1) \cdot n} < \frac{(n+1)^2}{2}.$$

分析  $n=1$  时, 左边  $=\sqrt{1}$ , 右边  $=1$ , 不等式成立.

记左边的式为  $A_n$ , 根据归纳假设, 有

$$A_n < \frac{(n+1)^2}{2}.$$

$$\text{而 } A_n = \sqrt{1 \cdot 2} + \sqrt{2 \cdot 3} + \cdots + \sqrt{(n-1) \cdot n},$$

$$A_{n+1} = \sqrt{1 \cdot 2} + \sqrt{2 \cdot 3} + \cdots + \sqrt{(n-1) \cdot n} + \sqrt{n \cdot (n+1)},$$

$$\text{有 } A_{n+1} = A_n + \sqrt{n \cdot (n+1)}.$$

$$\text{因此 } A_{n+1} < \frac{(n+1)^2}{2} + \sqrt{n \cdot (n+1)}.$$

$$\text{欲证 } A_{n+1} < \frac{(n+1+1)^2}{2} = \frac{(n+2)^2}{2},$$

$$\text{只需证 } \frac{(n+1)^2}{2} + \sqrt{n \cdot (n+1)} < \frac{(n+2)^2}{2},$$

$$\text{即证 } \sqrt{n \cdot (n+1)} < \frac{(n+2)^2}{2} - \frac{(n+1)^2}{2},$$

$$\text{也就是证 } \sqrt{n \cdot (n+1)} < \frac{2n+2}{2},$$

最后一个不等式可由基本不等式得到.

$$\text{证明 (1) } n=1 \text{ 时, 左边}=\sqrt{1}, \text{右边}=\frac{1+1^2}{2}=1, \text{不等式成立.}$$

(2) 假设  $n=k$  时不等式成立, 则是

$$\sqrt{1 \cdot 2} + \sqrt{2 \cdot 3} + \cdots + \sqrt{(k-1) \cdot k} < \frac{(k+1)^2}{2}.$$

又由基本不等式可得

© 2006 The Authors  
Journal compilation © 2006 Blackwell Publishing Ltd

---

号成立.

## 习题 40

1. 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为实数, 证明:

$$(a_1/a_2 + a_2/a_3 + \dots + a_{n-1}/a_n)(a_2/a_1 + a_3/a_2 + \dots + a_n/a_{n-1}) \geq n^2.$$

2. 证明, 对任意实数  $x$  有

$$|\sin nx| \leq n|\sin x|.$$

3. 证明: 对任意实数  $x > 1$ , 有

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots + \frac{1}{x^n} > \frac{1}{x}.$$

4. 证明: 对任意实数  $x > 1$ , 有

$$\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^3+1} + \dots + \frac{1}{x^n+1} > \frac{1}{x}.$$

5. 证明  $a, b, c, d, e, f, g, h, i$  为任意实数时成立的不等式, 证明:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 + i^2 \geq (a+b+c+d+e+f+g+h+i)^2.$$

## 第4章

# 平均值不等式



平均值不等式是应用广泛的  
不等式。

在日常生活中，我们经常遇到如何使材料最省，面积最大，容积最大等问题，可以用到平均值不等式来处理。

### 4.1 三个正数的平均值不等式

在1.1节中我们已经知道, 如果 $a, b$ 为正数, 那么

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

当且仅当 $a=b$ 时等号成立. 在2.2章中我们知道了, 对于任意正数

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立. 从一次均值不等式到任意次的, 是一个递推, 对于任意三个正数 $a, b, c$ , 显然也有

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad (1)$$

成立吗? 数科学家们愿意选取三个正数组成一数量关系.

从任意选取的三个正数, 计算的结果与均值不等式正是成立的, 当且仅当三数相等时才取等号.

接下来, 我们证明不等式(1).

为了避免根号, 用 $a^3, b^3, c^3$ 代替 $a, b, c$ , 不等式(1)变为

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq abc, \quad (2)$$

$$\text{它等价于} \quad a^3+b^3+c^3 \geq 3abc. \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{因} \quad a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

且 $a, b, c$ 为正数, 因此, 有

$$a^3+b^3+c^3 \geq 3abc \geq 0,$$

它式(3), 它成立. 从上述推导过程中还不难看出当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

对于三个正数 $a, b, c$ , 再取 $\frac{a+b+c}{3}$ 和 $\sqrt[3]{abc}$ 的均值不等式, 有

把 $\frac{1}{a}$ 、 $\frac{1}{b}$ 和 $\frac{1}{c}$ 分别称为 $a$ 、 $b$ 和 $c$ 的调和平均数, 不等式(1)表明三个正数的算术平均数不小于其调和平均数, 当且仅当三个数相等时两平均数相等. 我们通常把不等式(1)称为三个正数的平均数不等式.

**例1** 已知 $a, b, c$ 为正数, 求证:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

**证明** 因 $a, b, c$ 为正数, 根据三个正数的平均数不等式, 可知

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc},$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}.$$

上述两不等式的右边都大于0, 两式相乘得

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = 9.$$

当且仅当 $a=b=c$ 时, 等号成立.

**例2** 已知 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为正数, 求证: 若 $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ , 则

$$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n) \geq 3^n.$$

**证明** 因 $a_i$ 是正数, 根据三个正数的平均数不等式, 有

$$2+a_i \geq 3\sqrt[3]{2 \cdot a_i} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

同理  $2+a_2 \geq 3\sqrt[3]{2 \cdot a_2}$ ,  $2+a_3 \geq 3\sqrt[3]{2 \cdot a_3}$ ,  $\dots$ ,  $2+a_n \geq 3\sqrt[3]{2 \cdot a_n}$ .

将上述各不等式的两边分别相乘得

$$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n) \geq 3^n \sqrt[3]{2^n a_1 a_2 \cdots a_n} = 3^n \sqrt[3]{2^n} = 3^n \cdot \sqrt[3]{2^n} = 3^n.$$

∵  $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ ,

∴  $(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n) \geq 3^n$ .

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ 时, 等号成立.

**例3** 求证:  $x \cdot \sqrt{1-2x} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ .

**证明** 首先考虑该不等式右边是否正. 因 $1-2x \geq 0$ , 得 $x \leq \frac{1}{2}$ .

若 $x \leq 0$ 及 $x = \frac{1}{2}$ , 不等式左边不大于0, 该不等式成立.

若 $0 < x < \frac{1}{2}$ , 则根据三个正数的平均数不等式, 有

$$\begin{aligned}
 (x + \sqrt{1-3x})^2 &= x^2 + (1-3x) \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x \cdot (1-3x) \\
 &\leq \frac{1}{3} \left( \frac{\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x + (1-3x)}{3} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{36}x^2.
 \end{aligned}$$

$$\triangleq x + \sqrt{1-3x} \leq \left( \frac{1}{6}x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

当且仅当  $x = \frac{1}{9}$  时, 等号成立.

## 习题 11

1. 已知  $a, b, c$  为正数, 求证:  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$ .
2. 已知  $a, b, c$  为正数, 求证:  $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ .
3. 设函数  $f(x) = x^2$  满足  $xy > 0, x^2 + y^2 = 1$ , 求证:  $xy \leq x^2 + y^2$ .
4. 设  $0 < a < \frac{1}{2}$ , 求证:  $x^2(1-3a) \leq \frac{1}{3}$ .

## 4.1 三个正数平均值不等式的实际应用举例

**例1** 又是给工业设备设计节能生风用具, 圆材料筒的容器不少见. 你是否担心了多数圆筒形容器不是细增长筒的, 也不是扁扁的, 而是内筒截面直径大致相等, 你是否想过这是为什么? 当然, 圆筒截面直径大致相等的圆筒形筒上去比较均匀, 这是一条理由, 但更主要的原因是似乎不合流阻. 我们知道, 圆筒的容积到底是一定的, 但表面面积随着半径而改变, 这就会由材料筒壁的圆筒形容器与材料筒筒壁的圆筒形筒, 如果从成本高度考虑, 自然会选择

和适当的端点，究竟怎样的函数形状才能使函数为

**解** 如图 4-1-1，设容器的底为  $A$ ，底面半径

为  $r$ ，高面积为  $h$ ，面积为  $S$ ，这时  $r$  为变量，于

$$\text{是} \quad V = \pi r^2 h \quad (1)$$

$$\text{及} \quad S = (2\pi r^2 + 2\pi rh) \quad (2)$$

根据三个数算术平均数不等式，由(2)得

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh + \pi rh$$

$$= 2\sqrt{2\pi r^2(2\pi r^2 + 2\pi rh + \pi rh)} = 2\pi rh$$

$$= 2\sqrt{2\pi r^2 h^2}$$

(3)

将(1)代入(3)得

$$S \geq 2\sqrt{2\pi V^2} \quad (4)$$

$$\text{即} \quad S^2 \geq 4\pi V^2$$

$$\text{即} \quad S \geq 2\pi V$$

由此证得容器底面积最小，(4)号号成立。此时，图形的表面积

$$S = 2\sqrt{2\pi V^2}$$

最小，当用料最省，同时可求得  $r = \sqrt{\frac{V}{2\pi}}$ ， $h = \sqrt{\frac{V}{2\pi}}$ 。

**例 2** 如图 4-1-2，有一张边长为  $a$  mm 的正方形薄板，我们可以将它的四角分别剪去一个相同的小正方形，再将四角叠起来拼凑成一个没有盖的盒子，如图 4-1-3。自然，我们希望知道剪去多大的小正方形使得盒子的容积最大。



图 4-1-2



图 4-1-3

**解** 设剪去的小正方形边长为  $x$  mm，那么所做出的盒子的容积

$$V = x(a - 2x)(a - 2x) = 4x(a - x)^2 \quad (5)$$

为了省去变量  $x$ , 将原方程

$$y = \frac{1}{2} + 4x(2x - 2a)(2x - 2a),$$

这时  $4x$ ,  $x - 2a$ ,  $x - 2a$  三数和为常数, 于是根据三个数的平均值不等式, 有

$$\begin{aligned} y &\leq \frac{1}{2} \left( \frac{4x + (x - 2a) + (x - 2a)}{3} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{6x}{3} \right)^2. \end{aligned}$$

为使  $y$  取最大值, 则上述不等式应等号成立, 因此, 有

$$4x = x - 2a = x - 2a, \quad (*)$$

这意味着  $x = \frac{2}{3}$ , 即可得在四边上边长为  $\frac{2}{3}$  的正方形内接成的九点圆面积最大.

上面两个例子, 代表了一种解决几何问题的数学思想, 要记住的是, 用这种思想解决问题时, 一定要检查等号是否成立, 并确定等号成立的条件.

## 习题 12

- 某工厂需要造一幢面积一定的矩形办公楼, 问怎样才使用料最省?
- 本圆的面积与边长成正比, 与边长的平方成正比, 以圆周长为多边形周长求圆的面积的本原, 问如何求圆面积本原的面积最大?
- 如图 4-1, 第一根杆的垂直高度是第二根杆上第一根垂直高度, 大家知道, 左知得正高了, 由于左知得的左知得小, 这样求圆, 由于左知得的左知得不周知, 所以左知得知道, 由于左知得一点点的左知得不周知正知得正知得, 而左知得一点点的左知得不周知正知得正知得.

$$\text{即 } x = \frac{1}{2} \left( \frac{2x}{2} \right)^2.$$

这里  $x$  是一个和已知量有关的变量, 问如何求圆面积的本原, 又要检查等号是否成立?



图 4-1



## 阅读与思考

### $n$ 个正数的平均值不等式

我们学过两个正数  $a, b$  的

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

并且知道  $a=b$  时等号成立。据上一节我们已知道了，对于三个正数  $a, b, c$  有

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc},$$

并且知道  $a=b=c$  时等号成立。实际上，我们已运用数学归纳法证明了：对于  $n$  个正数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  有

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

也就是说，前面所证明已除了我们的大数例，那么现在我们来继续推广，对于任意  $n$  个正数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，是否有不等式

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad (1)$$

成立？这是一个非常优美的不等式，我们尝试证明它（前面大家十个正数所推广的很特殊）。

我们假设  $n=2$ ，记

$$A_2 = \frac{a_1+a_2}{2},$$

$$G_2 = \sqrt{a_1 a_2}.$$

$$\text{于是我们} \quad A_2 \geq G_2. \quad (2)$$

这是两个正数  $a$  有时的中值，运用数学归纳法证明如下：

**证明** (1)  $n=2$  时，不等式即能证得成立，直接成立。

(2) 假设  $n=k$  时不等式成立，那么，因

$$A_{k+1} = \frac{a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{k+1} + a_{k+1}}{k+1},$$

$$a_k + a_{k+1} + \cdots + a_k + a_{k+1} = (k+1)a_{k+1}.$$

则  $(k+1)A_{k+1} + (k-1)A_{k+1} = 2kA_{k+1}.$

所以  $A_{k+1} = \frac{a_k + a_{k+1} + \cdots + a_k + a_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{2k}$

$$= \frac{\frac{a_k + a_{k+1} + \cdots + a_k}{k} + \frac{a_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{k}}{2}. \quad (2)$$

根据均值不等式及基本不等式, 由(2)得

$$\begin{aligned} A_{k+1} &\geq \sqrt{\frac{a_k + a_{k+1} + \cdots + a_k}{k} \cdot \frac{a_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{k}} \\ &\geq \sqrt{\frac{a_k + a_{k+1} + \cdots + a_k}{k} \cdot \frac{a_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{k}}. \end{aligned}$$

所以  $A_{k+1} \geq \frac{a_k + a_{k+1} + \cdots + a_k + a_{k+1}}{k+1}$  成立.

化简得  $A_{k+1} \geq a_k + a_{k+1} - a_{k+1}.$

进而有  $A_{k+1} \geq \frac{a_k + a_{k+1} + \cdots + a_k + a_{k+1}}{k+1}.$

根据 (1), (2), 不等式对任意正整数  $n (n \geq 1)$  成立.

从上面证明过程中, 可以看出当且仅当  $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$  时等号成立.



## 数学建模

### 洗衣服的次数

我们还记得，衣服湿了要洗。

洗到若干次以后，再洗用一定量水由脏衣服变干净中。

这样就出了数学问题。问题是，怎样用数学家的眼光来看待这件事情的时候，从两者能得出数学问题。

但是，数学家里未必会去提这样的问题，尤其把问题提清楚，把洗衣问题的问题化为纯数学的问题，这叫做建立数学模型。

假设衣服已经湿了程度，便脏得越厉害了，那么一行，当然不可能把水完全晾干，洗衣后上可洗脏含有脏物称  $1\text{ kg}$ ，用  $20\text{ kg}$  清水来清洗，怎样才能洗得干净？

如果把衣服一下使用  $20\text{ kg}$  清水洗，即让脏物浓度上降  $1\text{ kg}$  水，一升  $20\text{ kg}$  水，脏物会分分号变成  $20\text{ kg}$  水重，即  $1/20$ ，衣服上还有  $1\text{ kg}$ ，所以脏物或脏量是原来的  $\frac{1}{20}$ 。

接着你不会这么办，你会把  $20\text{ kg}$  水全用光用，比如第一次用  $5\text{ kg}$ ，脏物减少到  $\frac{1}{5}$ ，再用  $15\text{ kg}$ ，脏物又减少到  $\frac{1}{5}$  的  $\frac{1}{20}$ ，即  $\frac{1}{5 \times 20} = \frac{1}{100}$ ，分得越小，效果越好。

同样道理说，也可以每次用  $10\text{ kg}$ ，每次脏物浓度减少到原有量的  $\frac{1}{10}$ ，因此可以说到  $\frac{1}{100}$  的效果？

要是不能洗得，分四次使用  $5\text{ kg}$  水，第一次脏物浓度减少到原有  $\frac{1}{5}$ ，因此之后，脏物减少到原有  $\frac{1}{5} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{100}$ ，效果更佳？

但是，这样说了是这个问题会变得更了？

统一问题, 如果电路上两点间距离是  $1/k$  kg 或  $1/k_0$  kg, 则电路重量是  $1/k_0$  kg, 那么又该如何使用呢?

你会发现用半箱内装满了, 这就能使用同一规格, 使电路重量等于上述电路重量  $m$  kg, 其中, 各电阻  $m_1$  g, 那么电路重量  $k$  kg.

电阻把  $1/k$  kg 电路成  $n$  倍使用, 那么重量是  $m_1, m_2, \dots, m_n$  kg, 经过  $n$  次使用, 重量上现在多少电阻呢?

第一次, 把电阻  $m_1$  g 电阻和  $m$  kg 电路电阻的  $m_1$  kg 电路中, 充分使用, 那么  $m_1$  g 电阻电阻成电阻是  $(m_1 + m)$  kg 电路.

把电路电阻, 电路电阻的电阻, 重量上现在多少电阻呢? 由于  $m_1$  g 电阻电阻等于  $(m_1 + m)$  kg 电路, 那么重量上电阻电阻重量  $m_1$  与电阻电路重量  $m$  成比例:

$$\frac{m_1}{m_1} = \frac{m_1}{m_1 + m}, \quad (1)$$

$$\text{或} \quad m_1 = m_1 + \frac{m_1}{m_1 + m} = \frac{m_1}{\left(1 + \frac{m_1}{m}\right)}, \quad (2)$$

再次使用可知, 那么电阻电路重量上电阻重量  $m_1$  为

$$m_1 = \frac{m_1}{1 + \frac{m_1}{m}} = \frac{m_1}{\left(1 + \frac{m_1}{m}\right)\left(1 + \frac{m_1}{m}\right)}, \quad (3)$$

那么电阻电路重量上电阻重量  $m_1$  为

$$m_1 = \frac{m_1}{\left(1 + \frac{m_1}{m}\right)\left(1 + \frac{m_1}{m}\right) + \left(1 + \frac{m_1}{m}\right)}, \quad (4)$$

有了这个公式, 电路重量有了数学模型, 下一步的问题是:

(1) 这个公式电路电阻, 电路电阻?

(2) 这个公式电路电阻电阻?

电路重量一个电阻, 电阻电路电阻电路电阻电阻  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , 才能使  $m_1$  最小? 电路电阻电路电阻电阻电阻?

这个电阻是  $n$  个电阻, 这个  $n$  个电阻电阻

$$\left(1 + \frac{m_1}{m}\right) + \left(1 + \frac{m_1}{m}\right) + \dots + \left(1 + \frac{m_1}{m}\right) = n + \frac{m_1}{m}. \quad (5)$$

于是可得证, 在  $n$  个数之和为一定值  $1 + n + \frac{1}{n}$  时,  $n$  个数的乘积有最大值.

利用平均值不等式,

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n), \quad (2)$$

$$\text{得则} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n. \quad (3)$$

这就是说, 每次用去量相等的时候, 这样最公平, 因此平均值的量是

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n}. \quad (4)$$

这就是说, 回答了刚才的问题 (1).

是不是分成  $n+1$  块要比  $n$  块更公平呢? 每块更细, 又可以理解为更公平或者更证明, 对  $n+1$  个数  $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$  用平均值不等式, 这就是

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 + \frac{1}{n+1}, \quad x_{n+1} = 0. \quad (5)$$

把它代入总值得

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n &\times \left(\frac{n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + 1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{2n+1}. \end{aligned} \quad (6)$$

这就是, 把水分成  $n+1$  块, 要比分成  $n$  块更细一些.

那么, 如果继续很多很多次, 那么是不是能用一定量的水把水继续分成很多块能比  $n$  块更公平?

不会的, 仍然可以用平均值不等式证明, 考虑  $n+1$  个数  $x_1,$

$x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ , 这里  $m$  是一个比  $\frac{1}{n+1}$  大的正数, 那么  $n = \frac{1}{1 + \frac{1}{n+m}}$ , 则

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 + \frac{1}{n+m}, \quad x_{n+1} + \cdots + x_{n+m} = 0.$$

于是,把它代入平均数不等式即证得结论

$$\left(1 + \frac{A}{a^2}\right)^a + b^a \leq \left(\frac{a\left(1 + \frac{A}{a^2}\right) + ab}{a+b}\right)^{a+b} = 1, \quad (2)$$

也就是

$$\left(1 + \frac{A}{a^2}\right)^a \leq \frac{1}{b^a} = \left(\frac{b}{b - \frac{A}{a}}\right)^a. \quad (3)$$

因为  $A$  是任一不小于  $\frac{A}{a^2}$  的整数时, 不等式都成立, 所以不难取个  $A$  使不等式得证. 具体地, 用  $A'$  表示不小于  $\frac{A}{a^2}$  的最小整数, 取  $k=A'$ , 则因  $k \geq \frac{A}{a^2}$ , 可知  $\frac{k}{k - \frac{A}{a^2}} \leq 2$ , 于是由 (3) 得

$$\left(1 + \frac{A}{a^2}\right)^a \leq 2^k. \quad (4)$$

例如, 当  $\frac{A}{a^2}=2$  时,  $A'=2$ , 得的不就是 (4); 当  $\frac{A}{a^2}=2.5$  时,  $A'=3$ , 得的不就是 (4); 当  $\frac{A}{a^2}=2.7$  时,  $A'=3$ , 得的不就是 (4); 当  $\frac{A}{a^2}=2.7$  时,  $A'=3$ , 得的不就是 (4).

总之,  $\frac{A}{a^2}$  越大, 使得  $k$  越小, 也就是使得  $2^k$  越小, 因而个位数越少. 例如可知, 用  $20 \lg$  水表, 又能读得到千分位有  $2 \lg$  水, 则千分位上读, 因千分位比原值的  $\frac{1}{1000}$  还少!

从上面分析过程不难看出, 用数学分析法解决实际问题的, 常常是这样做的.

1. 选择有意义的实际问题;

2. 建立数学模型, 把实际问题化成数学问题;

3. 选择适当的数学工具来解决问题——这里用的工具是“平均值不等式”;

4. 把数学上的结果应用到实际中去应用、检验.

其实, 数学模型和实际问题常常有千丝万缕, 例如, 有的物理现象只读数的時候, 只能粗略地分析而决非, 这就是粗略分析, 另

外，我们来看图书馆的用途，这要看看图书馆所花费的时间，多读几本图书馆的书，可又多用了时间，那么由于图书馆，而造成时间浪费的浪费最大，就是浪费金钱。所以，图书馆上边三四大原因也就足够了，如果时间能变，那么图书馆也就没有用了，那就是一个图书馆更浪费的图书馆了。

## 第5章

# 三个重要不等式



柯西不等式、排序不等式、笛卡尔不等式都是非常重要的不等式。在许多领域中都能看到它们的身影。本章将详细地介绍这三个重要不等式的背景、证明和简单应用。

## 3.1 柯西不等式

任取四个实数  $a_1, a_2, b_1, b_2$ , 以它们为坐标可以构造两个向量<sup>①</sup>

$$\vec{\alpha} = (a_1, a_2), \vec{\beta} = (b_1, b_2),$$

其中  $a_1, a_2, b_1, b_2$  为任意实数. 如

图 3-1 所示,  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  两向量不满足

$$\cos \theta = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|},$$

$$\text{即 } \cos \theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

由  $\cos^2 \theta \leq 1$  可以得到不等式

$$\cos^2 \theta = \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2}{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} \leq 1,$$

$$\text{即 } (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2). \quad (3.1)$$

其中等号成立的条件是  $\cos^2 \theta = 1$ , 即  $\theta = 0$  或  $\pi$ , 也就是说  $\vec{\alpha}$  与  $\vec{\beta}$  平行. 设  $(a_1, a_2)$  与  $(b_1, b_2)$  成比例, 其中一个是对一个的实数倍, 即  $a_1 = b_1 \lambda, a_2 = b_2 \lambda$  时等号成立.

从图 3-1 可以看出, 我们证明不等式的关键是图. 以下我们将用二次函数性质证明 (3.1).

设  $f(x)$  为二次函数

$$f(x) = (a_1 + a_2)x^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2)x + (b_1^2 + b_2^2) \quad (3.2)$$

的判别式

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \\ &= 4[(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 - (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)]. \end{aligned}$$

假设 (3.1) 不成立, 设用二次函数  $f(x)$  来说, 也就是

$$f(x) < 0$$

恒成立. 事实果真如此! 设  $a_1, a_2$  为任意实数  $x$ , 有



图 3-1

证明柯西不等式.

$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$  的证明.

证明: 假设柯西不等式不成立, 则存在实数  $a_1, a_2, b_1, b_2$  使得  $(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 > (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$ .



图 3-2



图 3-3

图 3-2:  $(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 > (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$

$$\begin{aligned} f(x) &= (a_1x^2 + (a_2b_1x + a_3) + (a_3b_1x^2 + (a_4b_1x + a_5) \\ &\quad + (a_5b_1x + a_6)x^2 + (a_6b_1x + a_7)x^2) \end{aligned}$$

当取值为  $a_1 = a_2 = 1, 2, \dots, n$  时等号成立.

上述方法不仅新颖,而且适用范围对基本不等式推广的一般情形.

设有非零实数  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ , 则

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2). \quad (2)$$

当取值为  $a_i = b_i, i=1, 2, \dots, n$  时等号成立.

证明 设二次函数

$$f(x) = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)x^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

因  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 > 0$ ,

且对任意实数  $x$

$$f(x) = (a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)^2 \geq 0, \quad (3)$$

故其判别式

$$4(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \leq 0.$$

从而得证(2).

由此可看出, 该式实质

$$a = \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_n}{a_n},$$

也是由  $a_i = b_i, i=1, 2, \dots, n$  时等号成立.

不等式(2)一般称为**柯西不等式**(Cauchy inequality), 它有着广泛的应用.

例1 用柯西不等式证明.

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}.$$

证明 取两向量

$$a = (b, c, d),$$

$$b = (a, c, d),$$

则由柯西不等式有

- 在证明中常使用恒等, 使问题变得简单.

证明

$$= \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)^2 +$$

$$\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)^2$$

$$= (a + b)^2 + (a + b)^2 +$$

故原不等式与题中不等式同构, 故原不等式得证.

$$\text{例 } \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq \frac{4}{a+b+c+d}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

$$\text{于是 } \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}} \geq \frac{4}{a+b+c+d}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq \frac{4}{a+b+c+d}$$

$$\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}} \geq \sqrt{\frac{16}{(a+b+c+d)^2}}$$

$$\text{例 } \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

证明 1. 如图 4-1-1 所示构造

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\text{例 } \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}$$



由(1)和(2)得

$$\frac{(\vec{a}-\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b})}{(\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}+\vec{b})} \leq 1,$$

$$\therefore (\vec{a}-\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b}) \leq (\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}+\vec{b}).$$

等号成立当且仅当  $|\cos \theta| = 1$ , 即  $\theta = 0$  或  $\pi$ , 此时两向量  $\vec{a}, \vec{b}$  共线.

若取  $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ , 则上式为柯西不等式③.

### 例 15

1. 证明  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ , 求证:

$$ac + bd + cd + ab + bc + ad \leq 1.$$

2. 证明  $a, b, c$  为实数,  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ , 求证:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{2}.$$

3. 证明  $a^2 + b^2 = 1$ , 求证:  $1 + \cos a \cos b \leq \sin a \leq 1 + \cos b$ .

4. 证明  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , 若  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ , 求证:

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \leq \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}.$$

5. 设  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  为实数, 证明柯西不等式④.

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} \geq \left| \frac{a_1 b_1}{n} + \frac{a_2 b_2}{n} + \dots + \frac{a_n b_n}{n} \right|.$$

6. 证明实数  $a, b, c, d$  满足

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1,$$

$$a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 4d^2 = 1,$$

求证:  $1 \leq a \leq 2$ .

## 3.1 排序不等式

设两同学甲、乙各自准备食品食用, 假定购买价格不同的食品  $n$

凡两两互素于任意数者，则其积亦与任意数互素。此命题可借助反证法证明。

设两两互素数，即于两两互质数组  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ， $b_1, b_2, \dots, b_n$ ，设其乘积为两两互素数，即两两互素数  $\{a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n\}$ 。

件，5件或6件。问在购物的过程中单价为1元、2元商品分别购得几件最少需花多少钱？最多需花多少钱？

不妨先解一题。问若要买回整箱，则至少1元4角的商品购得几件？最多1元角2角的商品最少购得几件？这是花钱最少的，于是我们得到最少是

$$1 \times 4 + 2 \times 3 + 3 \times 3 = 20 \text{ (元)}.$$

若要买0.5元4角的商品则最少购得24件，若要买0.5元2角的商品则最少购得36件，于是最多是

$$1 \times 4 + 2 \times 3 + 3 \times 3 = 20 \text{ (元)}.$$

为了证明上述答案，把两两互质数列表出来，可以得到不敷组合：

$$1 \times 3 + 2 \times 3 + 3 \times 3 = 21, \quad 1 \times 3 + 2 \times 3 + 3 \times 3 = 21,$$

$$1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 3 = 21, \quad 1 \times 3 + 2 \times 3 + 3 \times 4 = 21,$$

$$1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 4 = 21, \quad 1 \times 3 + 2 \times 3 + 3 \times 4 = 21.$$

比较得， $1 \times 4 + 2 \times 3 + 3 \times 3 = 20$  最小， $1 \times 3 + 2 \times 3 + 3 \times 3 = 20$  最小。

让我们进一步考虑两个互质数组  $\{a_1, a_2, a_3\}$ ， $\{b_1, b_2, b_3\}$ ，是否也有类似的结果，也就是说，没有两数从小到大排列的数

$$a_1 b_1 < a_2 b_2 < a_3 b_3,$$

$$b_1 < b_2 < b_3.$$

那么， $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$  (是序数)  $< a_1 b_3 + a_2 b_1 + a_3 b_2$  (同序数) ①

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$
 (同序数)  $< a_1 b_3 + a_2 b_1 + a_3 b_2$  (同序数) ②

是否成立？这里  $b_1, a_1, b_2, a_2, b_3, a_3 = 1, 2, 3$ 。

我们用最不等式法。

(1) 若  $b_1 = b_2$ ，则显然

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 < a_1 b_3 + a_2 b_2. \quad \text{③}$$

因为  $a_1 < a_2, b_1 < b_3$ 。

所以  $a_1 - a_2 > 0, b_1 - b_3 > 0$ 。

将上面两式相乘可得

$$(a_1 - a_2)(b_1 - b_3) > 0,$$

$$\text{即} \quad a_1 b_1 + a_2 b_3 < a_1 b_3 + a_2 b_1.$$

(2) 若  $a_i \neq b_i$ , 则分两种情形, 首先, 设  $b_i = b$ ,  $i = 1$  或  $i_0$ , 又设  $a_i$  与  $b_i$  位置, 如图即可知

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{i-1}b_{i-1} + a_{i+1}b_{i+1} + \cdots + a_{i_0}b_{i_0} > a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{i-1}b_{i-1} + a_{i+1}b_{i+1} + \cdots + a_{i_0}b_{i_0},$$

因此, 下一步只需证明

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{i-1}b_{i-1} < a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{i_0}b_{i_0}.$$

设中  $(a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}; b_1, b_2, \cdots, b_{i-1}) < (b_1, b_2, \cdots, b_{i_0})$ , 正式证明见式, 因此证式成立.

回到上述做法, 就比如将一群同学从小到大按身高排列进行排队, 有排好的队列后先只取排中小个子同学排队地组成一队(这容易做到), 然后再由后排的不合要求同学两个人同时位置调换, 这样一步步继续过去若干次调整即可达到高度排序需求, 整个过程很容易进行及操作容易.

### 推论四(不等式3)

因为  $a_1 < b_1 < c_1$ ,

所以  $-a_1c_1 < -a_1b_1 < -b_1c_1$ .

根据江有

$$a_1c_1 - a_1 + a_1(-b_1) > a_1c_1 - a_1 > a_1c_1 - a_1 + a_1(-b_1) + a_1(-b_1) + a_1(-b_1),$$

$$\text{故 } a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{i-1}b_{i-1} < a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{i_0}b_{i_0}.$$

不难发现, 运用上面的方法, 同样可以证明, 对于两个  $n$  元数组  $(a_1, a_2, \cdots, a_n), (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ , 如果

$$a_1 < b_1, a_2 < b_2, \cdots, a_n < b_n,$$

$$b_1 < b_2 < \cdots < b_n,$$

$$\text{那么有 } a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{i-1}b_{i-1} < a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{i_0}b_{i_0}, \quad (2)$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{i-1}b_{i-1} < a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{i_0}b_{i_0}. \quad (3)$$

这里  $i, i_0 = 1, 2, \cdots, n; i < i_0$ .

事实上, 若  $a_i = b_i$  或  $a_i < b_i$ , 那么, 根据证式有

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{i-1}b_{i-1} + \cdots + a_{i_0}b_{i_0} <$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{i-1}b_{i-1} + \cdots + a_{i_0}b_{i_0}.$$

又若  $a_i = b_{i_0}, i_0 < i = 1$ , 那么, 根据证式有

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq \cdots \geq a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \geq$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq \cdots \geq a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \geq a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$$

继续下去，即可得证式。

四 
$$b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 \geq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$$

证 
$$-b_1^2 - b_2^2 - \cdots - b_n^2 \geq -b_1^2 - b_2^2 - \cdots - b_n^2$$

根据不等式的性质

$$a_1(-b_1^2 + a_1^2 - b_1^2) + \cdots + a_n(-b_n^2 + a_n^2 - b_n^2) \geq 0$$

$$a_1(-b_1^2 + a_1^2 - b_1^2) + \cdots + a_n(-b_n^2 + a_n^2 - b_n^2)$$

两边同乘以-1，即得证式。

综合(1)、(2)，我们得到以下重要不等式。

设有两数组  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  与  $b_1, b_2, \cdots, b_n$  满足

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$$

$$b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$$

则有

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq \cdots \geq a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \quad (\text{同序和})$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq \cdots \geq a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \quad (\text{乱序和})$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq \cdots \geq a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \quad (\text{倒序和})$$

其中  $b_1, b_2, \cdots, b_n$  为  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  的排列。

上述不等式称为 **排序不等式**，也可简称为

同序和  $\geq$  乱序和  $\geq$  倒序和。

例1 已知  $a, b, c$  为正数，求证：

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{2(a+b+c)}$$

证明 根据排序不等式中  $a, b, c$  的“地位”的对称性，不妨设  $a \geq b \geq c$ ，则

$$\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{c}, \quad a \geq b \geq c$$

由排序不等式，同序和  $\geq$  乱序和

得 
$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a^2}{c+a} + \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c}$$

再两边同乘  $(b+c) > 0$ ，得

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a+b+c),$$

又  $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ ,

所以  $\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a+b+c} \geq abc$ .

例2 设集合  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$ , 求证:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{n-1}{a_n} \leq \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

证明 将  $a_1, a_2, \dots, a_n$  自小到大排列, 不妨设为

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n.$$

又因  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是  $1$  到  $n$  的排列, 有

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n.$$

由此可得

$$1 \leq \frac{1}{a_1} < \frac{1}{a_2} < \dots < \frac{1}{a_{n-1}} < \frac{1}{a_n}.$$

根据排序不等式, 有

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \\ \geq (a_1 + \frac{1}{a_2} + a_3 + \frac{1}{a_4} + \dots + a_{n-1} + \frac{1}{a_n}) \\ \geq (1 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{4} + \dots + (n-1) + \frac{1}{n}) \\ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{n-1}{n}. \end{aligned}$$

与上一步应用柯西不等式相类似, 应用排序不等式首先由下确界所需确定两组数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  与  $b_1, b_2, \dots, b_n$ .

例3 设有  $10$  人各拿一个水桶同时到龙头去打水, 设水龙头往满桶(容量为  $1$ ) 注水,  $10$  个人的水桶都满了,  $\min$  假设这些人各不相同, 问:

当只开一个水龙头打水时, 应如何安排这  $10$  个人的次序, 使他们回到水龙头的时间(包括每个人自己取水所花的时间)最少? 这时间等于多少? (假设水桶的容量为  $1$ .)

解 假设水桶容量为  $1$ ,  $t_1, \dots, t_{10}$  顺序打水, 那么总的打水时间为

$$\begin{aligned} P(x) &= T_1 + (T_1 + T_2) + \cdots + (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) \\ &= (n+1)T_1 + nT_2 + \cdots + 2T_{n-1} + T_n. \end{aligned}$$

不妨设  $T_1 < T_2 < \cdots < T_n$ . 那么, 根据排序不等式, 有

$$P(x) \geq (n+1)T_1 + nT_2 + \cdots + T_n.$$

所以最少时间为  $(n+1)T_1 + nT_2 + \cdots + T_n$ . 也就是说将机器送到少的点前面的使用次数是  $n+1$  个人的次序.

**例 4.2** 当有  $n$  个点是环形时, 如何安排这  $n$  个人的次序, 使得最后总的花费时间为最少? 这时间等于多少? (请证明你的结论.)

### 例 4.2

1. 设  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  为实数, 用排序不等式证明:

$$a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n \leq a_1c_2 + a_2c_1 + \cdots + a_nc_n.$$

其中  $c_1, c_2, \cdots, c_n$  与  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  满足一排列.

2. 设  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  为实数满足  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  满足一排列, 则

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} + \cdots + \frac{a_n}{a_n + a_1} \geq \frac{n}{2}.$$

3. 设  $a_i$  为实数 ( $i=1, 2, \cdots, n$ ), 证明:

$$\frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n^2 + a_1^2} \geq \frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2} + \frac{a_2^2}{a_2^2 + a_1^2} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n^2 + a_1^2}.$$

4. 设  $a_1, a_2, a_3$  为两两不相等的实数, 证明:

$$a_1 + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.$$

5. 设  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  为两两不相等的实数, 证明: 对于任意实数  $x$ , 不等式

$$a_1 + \frac{x}{a_1} + \frac{x}{a_2} + \cdots + \frac{x}{a_n} \geq (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})x$$

6. 证明柯西不等式: 设

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1,$$

$$b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 = 1,$$

$$\text{则 } \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n} \leq \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}, \frac{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}{n}.$$

### 9.3 柯西利不等式

我们已学过二项式定理，根据二项式定理展开，当  $x > 0$ ， $a$  为正实数时，有

$$(1+ax)^2 \geq 1+2ax. \quad (1)$$

其实，当  $x > -1$  时，不等式①仍然成立，这一点我们下面用数学归纳法予以证明。

(1)  $a=1$  时，不等式①显然成立。

(2) 假设  $a=k$  时不等式①成立，即  $x > -1$ ，可得  $x+1 > 0$ ，则

$$\begin{aligned} (1+ax)^2 &= (1+ax)^2(x+1) \\ &\geq (1+kx)(1+x) \\ &= 1+(k+1)x+kx^2 \\ &\geq (1+(k+1)x)^2. \end{aligned}$$

$a=k+1$  时不等式①亦成立。

根据 (1)，(2) 可知对任何正整数  $a$ ，当  $x > -1$  时，不等式①成立。

我们称不等式

$$(1+ax)^2 \geq 1+2ax(x+1) \quad (2)$$

为**伯努利不等式** (Bernoulli inequality)。

**例** 已知  $a > 0, c > a > b > 0, b, a+b, c+a, a$  为大于 1 的正整数，求证：

$$a^2 + b^2 > a^c + a^b.$$

**证明** 设  $a=c+a, b=a+b-k$  (因  $a > 0$ ，于是

$$\begin{aligned} (a^c + b^2) - (a^c + a^b) &= a^c + a^{c+a} - a^c - a^{a+b-k} \\ &= a^c + a^c + a^c - a^c - a^c + a^c \\ &= a^c \left[ \left(1 + \frac{a}{c}\right)^c + a^a \left(1 - \frac{a}{a}\right)^k - a^a + a^b \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

根据柯西利不等式，有

$$\left(1 + \frac{d}{x}\right)^n \left(2x + a + \frac{d}{x}\right) \quad (3)$$

$$\left(1 - \frac{d}{x}\right)^n \left(2x - a + \frac{d}{x}\right) \quad (4)$$

由 (3), (4) 得

$$(a^2 + b^2) = (a^2 + d^2)$$

$$2a^2 \left(1 + a + \frac{d}{x}\right) + d^2 \left(1 - a + \frac{d}{x}\right) = (a^2 + d^2)$$

$$= (a^2 + d^2) \cdot 2a^2$$

$$2a^2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = a^2 + d^2.$$

**Figure 1**

点输出汽油, 并给美国汽油, 一半用此汽油的 50 型拖车汽油运往美国, 用拖车拖到美国运往汽油, 因此, 用拖车从点拖到美国运往汽油运往美国。

根據規定標準，**一、經濟發展量**，即由經濟發展率乘以 200%，**二、地區發展量**，即由地區發展率乘以 200%。

设从上述同形性图式出发, 有  $n$  个中项项  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , 同  $C_1, C_2, \dots, C_n$  有  $n$  个主项项  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , 因而有  $n$  个谓项项  $B_1, B_2, \dots, B_n$ 。因而有  $n$  个谓项项  $B_1, B_2, \dots, B_n$ 。

100

又因该型汽车每辆耗用钢材重量为 1.1 吨, 该车每架中位重量为 0.5 吨, 故该型汽车每架一定所需钢材量为 1.6 吨, 故即取 1.6。

丙烷从汽化罐出来, 经蒸汽加热汽化后进入压缩机, 蒸汽加热汽化量为 1 吨, 但由于 a 侧汽化罐汽化量受温度影响, 从 0.7 吨到 0.9 吨不等。

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

又由图可知  $4(1-\sin\theta)$  轴内半圆弓形, 此扇形面积为  $S_2$ , 从而  $S_2$  内  
面积  $S_2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \theta = 2\theta$

$$J_1 = \omega(1 - \omega_1) - \omega(2 - \omega_2) + J_0 = \frac{1}{2}(\omega(1 - \omega_1) - \omega(2 - \omega_2))$$

Figure 1. The effect of the concentration of the polymer on the gelation time.

www.ck12.org

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{n} \cdot \frac{a(1-a)(1-a)(1-a)(1-a)(1-a)}{a} \\
 &= (1-a)(1-a)(1-a)(1-a)(1-a) \\
 & \leq \frac{(1-a)(1-a)(1-a)(1-a)(1-a)(1-a)}{1} \\
 &= \left(1+\frac{1}{a}\right)^{-n+1}.
 \end{aligned}$$

于是得  $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = \frac{n}{n+1}$  时取等号.

所以, 最大可能值为  $a_{\max} = \left(1+\frac{1}{a}\right)^{-n+1}$ .

故  $\frac{1}{a_n} = \left(1+\frac{1}{a}\right)^{-n+1}$ , 则

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= \frac{\left(1+\frac{1}{a+1}\right)^{-n+1}}{\left(1+\frac{1}{a}\right)^{-n+1}} \\
 &= \frac{\left(1+\frac{1}{a+1}\right)^{-n+1}}{\left(1+\frac{1}{a}\right)^{-n+1}} \cdot \frac{a+1}{a} \\
 &= \left[\frac{a(a+1)}{1+a+1}\right]^{-n+1} \cdot \frac{a+1}{a} \\
 &= \left[\frac{1}{1+\frac{1}{a(a+1)}}\right]^{-n+1} \cdot \frac{a+1}{a} \\
 &= \frac{1}{\left[1+\frac{1}{a(a+1)}\right]^{-n+1}} \cdot \frac{a+1}{a}. \quad \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

根据反常用不等式, 有

$$\left[1+\frac{1}{a(a+1)}\right]^{-n+1} > 1 + (n+1) \cdot \frac{1}{a(a+1)} = \frac{n+1}{a}, \quad \textcircled{3}$$

由②、③可得

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{\frac{n+1}{a}} \cdot \frac{a+1}{a} = a.$$

所以  $\frac{1}{a_{n+1}} > \frac{1}{a_n}$ .

由等差数列  $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$  是递增数列，从而  $a_{n+1} > a_n$  的增大的原理，

$$a=1 \text{ 时， } a_{n+1} = \frac{1}{2} < 100\%,$$

$$a=2 \text{ 时， } a_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \frac{8}{27} < 100\%,$$

$$a=3 \text{ 时， } a_{n+1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = \frac{81}{256} > 100\%,$$

所以，至少应设置 3 个电话分机线。

## 課程總結報告參考題

完成一個學習總結報告，在網上交回。報告应包括以下三方面的內容。

(1) 知識的總結。對本專題所介紹的不等式中圖論與數學建模方法與數學背景進行總結。

(2) 知識。通過查閱資料，再查研究，決擇成果，發表文章，論文思考，進一步探討本題式的證明。

(3) 自己對本題式學習的感想。

## 数学词汇中英文对照表

(按词汇拼音字母先后顺序)

中文词	英文词	页 码
不等式	inequality	3
比较法	comparison method	3
算术平均	arithmetic mean	30
几何平均	geometric mean	30
基本不等式	basic inequalities	30
分析法	analysis method	38
综合法	synthesis method	38
反证法	reduction to absurdity	33
绝对值	absolute value	24
数学归纳法	mathematical induction	38
柯西不等式	Cauchy inequality	39
贝努利不等式	Bernoulli inequality	47